



深圳中学  
SHENZHEN MIDDLE SCHOOL

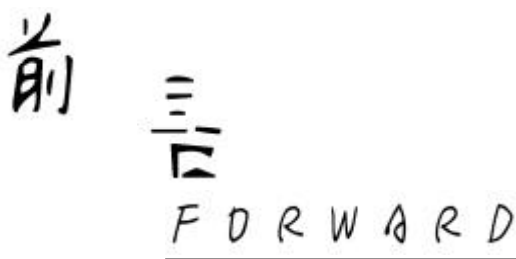
高中园



2025 年新高一数学暑假练习

# 走进高一

高中数学



## 致高中园新高一少年：以衔接为阶，向卓越而行

大家好！我是曾老师。自 2003 年从长沙一中调入深圳中学，2024 年定居于深圳中学高中园。我长期从事初高中阶段的教学工作，先后有 8 年带初中竞赛班或平行班。这些年，我伴一届又一届少年走过这段关键的成长旅程，见过太多故事：有些曾在初中赛场意气风发的少年，一脚踏入高中课堂便慌了阵脚；曾经的佼佼者，竟在函数与方程的迷雾中沦为“特困生”。每当这时，我总在想：若能为他们搭一座平稳的桥，让初中的积累自然过渡到高中的挑战，该多好？现在当你们怀揣着对高中的憧憬，站在初中与高中的十字路口，这便是我编写这份衔接练习的初心。

### 关于“衔接”，我想对你说句心里话

暑假里，“衔接班”成了热词。但许多同学和家长陷入了一个误区：把衔接课变成“新课速成班”，仿佛提前学完高一内容，就能赢在起跑线。可事实是，短短两周“灌”完的知识，就像沙滩上堆的城堡——开学时潮水一来，便所剩无几。

我不反对提前学习，但我坚决反对“速成式抢跑”。这种学习不仅留不下扎实的知识，更会让你养成“囫囵吞枣”的坏习惯：上课觉得“学过了”便不再专注，遇到难题又因基础不牢而退缩。这不是衔接，而是给高中学习埋下隐患。

真正的衔接，应该是一场“精准补给”：以你初中的知识为起点，补上那些初中课堂没讲透、高中却天天要用的“必备装备”——比如更灵活的整式变形、分式拆分的技巧、根式化简的门道；比如配方法、换元法这些能贯穿高中三年的“解题利器”。它不是让你提前跑，而是帮你把跑鞋系紧、把鞋带系牢，让你踏入高中时，每一步都走得稳、走得实。

### 这份练习里，藏着你需要“通关秘籍”

翻开这份衔接练习，你会发现它不追求“新”，只打磨“实”：

- **练能力**：从绝对值的几何意义到二次根式的化简，从分式方程的巧解到二次函数的最值，每一道题都在帮你锻造“运算的精准度”和“思维的灵活性”。高中数学更抽象、节奏更快，只有当你能熟练拆分一个分式、快速配出一个平方时，才能腾出精力应对更复杂的挑战。
- **补方法**：你会学到初中没深入讲的乘法公式、因式分解的新技巧、韦达定理的深层应用——这些不是“超纲内容”，而是高中课堂默认你已经掌握的“基础语言”。就像学英语要先背单词，这些方法就是数学的“核心词汇”。
- **拓思维**：从分类讨论去掉绝对值符号，到用函数图象分析值域，题目背后藏着的是“如何把复杂问题变简单”的思考方式。高中数学更看重“为什么这样做”，而这份练习会带你提前感受这种思维的转变。

### 少年，请相信：扎实的根基，能托你走得更远

我知道，高中园的你们，心里一定憋着一股劲——想和深圳中学本部的学子并肩，想证明自

己能站上更高的平台。这份心气，特别好。但请记住：所有的卓越，都始于脚踏实地的积累。

当你认真做完每一道题，当你搞懂每一个“为什么”，当你能熟练运用这些方法解决新问题时，你会发现：自己的解题速度快了，思路清晰了，面对高中课本时，那种“畏难感”慢慢变成了“跃跃欲试”。这才是衔接的意义——不是让你提前看到终点，而是让你在起点就拥有冲刺的底气。

暑假的时间很宝贵，但比时间更宝贵的，是“不浮躁的心态”。不必和别人比进度，只和昨天的自己比：今天是否比昨天多懂了一个公式？是否比昨天更会拆分一个因式？把这些“小进步”攒起来，就会变成你高中路上的“大能量”。

少年，高中的大门即将为你打开。它或许有挑战，但更有惊喜；或许有难题，但更有解开难题后的畅快。请沉下心，用这份练习打磨自己，当你真正掌握了这些基础，你会发现：曾经遥不可及的目标，正一步步向你走来。

加油！我在高中的课堂上，期待看到一个自信、扎实、眼里有光的你。

曾老师

于晒布路

2025年7月

衔接讲座B站视频



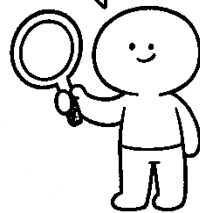
<https://space.bilibili.com/678217479>



## 第一讲 绝对值

所有练习均有详细答案，请见电子版《2025 级新高一暑期数学练习 答案》。

原来  $|a|$  就是距离呀！

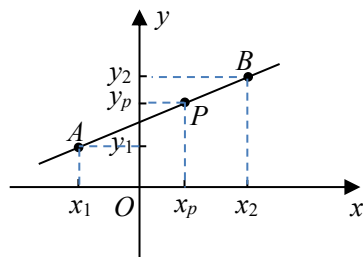
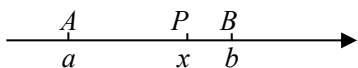


### 1. 数轴上两点间的距离

- $a, b$  为任何实数，下面四个命题正确的是（ ）.  
A. 如果  $a > b$ ，那么  $|a| > |b|$       B. 如果  $|a| > b$ ，那么  $a^2 > b^2$   
C. 如果  $a > |b|$ ，那么  $a^2 > b^2$       D. 如果  $a \neq |b|$ ，那么  $a^2 \neq b^2$
- 设  $T = |x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4|$  中， $x$  可取任意实数值. 那么  $T$  最小的值是（ ）.  
A. 1      B. 2      C. 3      D. 4
- 已知数轴上点  $A$  表示 -3，点  $B$  表示 7，点  $P$  在  $A$  和  $B$  之间，且  $AP:PB = 1:4$ ，求点  $P$  对应的数  $x$ .
- 点  $A$  对应数  $a$ ，点  $B$  对应数  $b$  ( $a < b$ )，点  $P$  在  $AB$  的延长线上，且  $AP:PB = 5:2$ ，求点  $P$  对应的数  $x$ .

#### (选做) 思维拓展题

5. 请你研究以下两个问题：
- 在数轴上，点  $A, B$  分别表示数  $a, b$ ，点  $P$  在线段  $AB$  上，且  $PA:PB = t:1$ ，求点  $P$  对应的数  $x$  (用  $a, b, t$  表示)；
  - 在平面直角坐标系内，点  $A, B$  的坐标分别是  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，点  $P$  在线段  $AB$  上，且  $PA:PB = t:1$ ，求点  $P$  对应的坐标.



## 2、分类讨论去掉绝对值符号

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

### 1. 化简表达式 $|x+4|-|x-2|$ .

提示：在数轴上标出  $x=-4$ ,  $x=2$ , 对  $x$  分三种情况讨论, 去绝对值符号 (参考附件中的教程, 后同)。



何去何从? 要分情况讨论哦!

### 2. 化简表达式 $|2x-1|+|x+3|$ .

提示：在数轴上标出  $x=1/2$ ,  $x=-3$ , 对  $x$  分三种情况讨论, 去绝对值符号。

(选做) 思维拓展题

### 3. 化简表达式 $|3x+6|-|x-4|+|x|$ .





### 3、含绝对值的方程和不等式

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 不等式  $1 \leq |x-2| \leq 7$  等价于 ( ).

A.  $x \leq 1$  或  $x \geq 3$

B.  $1 \leq x \leq 3$

C.  $-5 \leq x \leq 9$

D.  $-5 \leq x \leq 1$  或  $3 \leq x \leq 9$

2. 若  $x_1, x_2$  都满足  $|x-1| + |x+1| = 2$  且  $x_1 < x_2$ , 则  $x_1 - x_2$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

3. 解方程:  $|x-2| + |x+1| = 5$ .

提示: 要求用两种方法: ①分三段讨论; ②绝对值的几何意义.

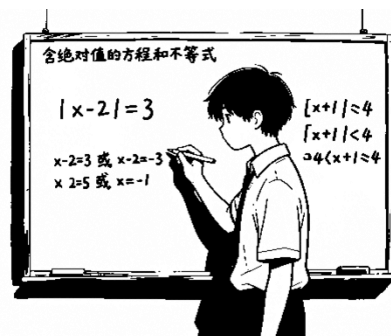
4. 解不等式:  $|x+3| - |2x-1| < \frac{x}{2} + 1$ .

提示: 分三种情况讨论去绝对值符号. 为简化过程, 建议将每种情况写成方程组的形式.

5. 解下列不等式:

(1)  $|2x-4| \geq x+2$ ;

(2)  $|2x-4| < x+2$ .



6. 解不等式:  $|x-1| < |x+2|$ .

提示: 可以用两种方法: ①将不等式两边同时平方; ②利用绝对值的几何意义.

**(选做) 拓展思维题**

7. 解下列方程与不等式:

(1)  $|2x+1| - |x-3| + |x-6| = 6$ ; (2)  $x^2 + |1-x| = 11$ ; (3)  $|2x+1| - |x-4| > 2$ .

8. 关于  $x$  的方程  $x^2 - 2025a|x| - 2030 = 0$  ( $a$  为常数) 的解的个数是 ( ).

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

9. 解关于  $x$  的不等式  $|2x+3| - 1 < a$ .

10. 讨论关于  $x$  的方程  $|2x+1| - |x+2| = a$  的解.

## 第二讲 整式

### 1. 介绍几个乘法公式

初中阶段只学习了两个乘法公式：平方差公式和完全平方公式。高中阶段对代数式恒等变形能力有更高的要求，我们会遇到更为复杂的多项式乘法运算，这里介绍几个乘法公式。

因为  $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ，所以有

**完全立方和公式**  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ 。

将完全立方和公式中的  $b$  换成  $-b$ ，有

$$[a+(-b)]^3 = a^3 + (-b)^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2,$$

于是得到完全立方差公式：

**完全立方差公式**  $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$ 。

由完全立方和公式有  $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ ，从而

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab] = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

于是得到立方和公式：

**立方和公式**  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 。

将立方和公式中的  $b$  换成  $-b$ ，得到立方差公式：

**立方差公式**  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ 。

利用两项完全平方公式可以推导三项完全平方和：

$$(a+b+c)^2 = [a+(b+c)]^2 = a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2,$$

于是得到三项和平方公式：

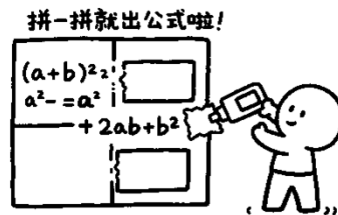
**三项和平方公式**  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ 。

将以上公式中的  $b$  换成  $-b$ ，得到： $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ac$ 。

1. 将多项式  $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 4y + 5$  分别按以下要求排列：

(1) 当  $y$  为常数时，关于  $x$  的二次三项式；

(2) 当  $x$  为常数时，关于  $y$  的二次三项式。



2. 利用公式化简： $(2a+3b)^3$ 。

3. 利用公式化简： $(m^2 + mn + n^2)(m - n)$ 。

4. 利用公式展开并化简  $(a+b)^3 - (a-b)^3$ 。



5. 利用公式分解因式:  $8x^3 - 27y^3$

6. 利用公式分解因式:  $a^2 + b^2 + c^2 - 2bc + 2ca - 2ab$ .

7. 用作差法比较下列两组数的大小:

(1)  $a^2 + b^2$  与  $2ab$ ;

(2)  $a^2 + b^2 + c^2$  与  $2ab + 2bc - 2ca$ ;

8. 已知  $a + b + c = 4$ ,  $ab + bc + ac = 4$ , 求  $a^2 + b^2 + c^2$  的值.

9. 已知  $x + y = 5$ ,  $xy = 6$ , 求  $x^3 + y^3$  的值.

**(选做) 拓展思维题**

10. (1) 化简  $(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)^2$ ;

(2) 已知  $x = 2$ , 求  $(x+1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^3 + 1)(x^9 - 1) - 2^{18}$  的值.

**提示:** 第(1)问中  $x^2 + 2xy + y^2$  就是  $(x+y)^2$ , 而  $x+y$  与  $x^2 - xy + y^2$  相乘就是立方和公式; 第(2)问中  $x+1$  与  $x^2 - x + 1$  搭配得到  $x^3 + 1$ , 再顺势与  $x^6 - x^3 + 1$  结合.

11. 已知  $a^3 + b^3 = 2$ , 证明:  $a + b \leq 2$ .

12. 设  $\theta$  为任意的锐角,

(1) 求证:  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ;

(2) 设  $\sin \theta + \cos \theta = t$ , 求  $\sin \theta \cos \theta$ ,  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ ,  $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ ;

(3) 比较  $2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$  和  $(\sin \theta + \cos \theta)^2$  的大小, 并求  $\sin \theta + \cos \theta$  的最大值.

**提示:** (1) 构造锐角为  $\theta$  的直角三角形, 设  $\theta$  的对边为  $a$ , 邻边为  $b$ , 将  $\sin \theta$ ,  $\cos \theta$  用  $a$ ,  $b$  表示;

(2) 可以用 (1) 的结论.



## 2、补充几个分解因式的方法

(要求用指定方法解决, 对以下方法不了解的学生, 请学习电子版教程或观看 B 站视频)

1. 用十字相乘法分解因式:

(1)  $3x^2 - 10x + 8$ ;

(2)  $5x^2 + 7x - 6$ ;

(3)  $4x^2 + 2x - 6$ .

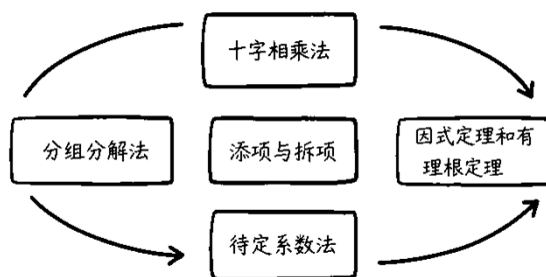
2. 用分组分解法分解因式:

(1)  $2ax - 10ay + 5by - bx$ ; (2)  $ax + 2by + cx - 2ay - bx - 2cy$ ; (3)  $x^2 - x^2y + xy^2 - x + y - y^2$ .

3. 用添项与拆项分解因式:

(1)  $x^3 - 3x + 2$ ;

(2)  $x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ .



4. 用因式定理和有理根定理分解因式:

(1)  $2x^3 - 5x^2 + x + 3$ ;

(2)  $-3x^3 + 8x^2 + 5x - 6$ .

5. 用待定系数法将  $x^4 + x^2 + 1$  分解为两个二次式.

(选做) 拓展思维题

6. 若  $a < b$ ,  $x < y$ , 且  $A = ax + by$ ,  $B = bx + ay$ , 利用作差法比较  $A$ 、 $B$  的大小.

7. 已知  $2^{2m+n} = a$ ,  $8^{m-3n} = b$ , 求  $2^{m+11n}$  的值. (结果用  $a$ ,  $b$  表示)

8. 已知  $x$ ,  $y$ ,  $z$  为三个非负实数, 且满足  $3x + 2y + z = 5$ ,  $x + y - z = 2$ , 设  $s = 2x + y - z$ , 请将  $s$  表示为只含字母  $z$  的表达式, 并说明  $z$  的取值范围.

### 3、配方法

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1.  $\triangle ABC$  的三边  $a$ 、 $b$ 、 $c$  满足  $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a+c) = 0$ , 则此三角形的形状是 ( ).

- A. 直角三角形    B. 等腰直角三角形  
C. 等边三角形    D. 都有可能

2. 求方程  $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$  的解  $(x, y)$ .



3. 求  $x^2 - 8x + y^2 + 6y + 30$  的最小值, 并指出此时  $x$  和  $y$  的值.

4. 证明对于任意实数  $m$ ,  $m^2 - 2mn + 3n^2 + 4$  恒为正数.

#### (选做) 拓展思维题

5. 求  $2x^2 - 8xy + 9y^2 - 2y + 4$  的最小值, 并指出此时  $x$  和  $y$  的值.

**提示:** 先把整式写成  $2x^2 - 8y \cdot x + (9y^2 - 2y + 4)$ , 看作一个关于  $x$  的二次三项式, 配成“ $2(x+\dots)^2 + \dots$ ”的形式.

6. 已知函数  $y = x^3 + x$  的图象经过点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 求证:  $y_1 < y_2$ .

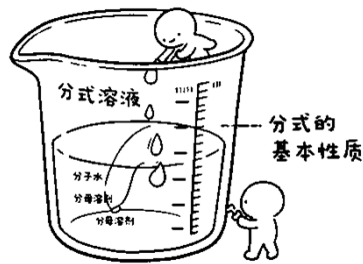
**分析:** 欲本问就是比较  $x_1^3 + x_1$  和  $x_2^3 + x_2$  的大小, 不妨作差, 对差式分解因式并分析各个因式的符号.

## 第三讲 分式

### 1. 两个比例性质

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 已知  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , 且  $3b + 2d \neq 0$ , 利用等比性质证明  $\frac{3a + 2c}{3b + 2d} = \frac{a}{b}$ .



2. 已知  $k = \frac{a+3}{b-2} = \frac{7-a}{4-b}$ , 由等比性质求  $k$  的值.

3. 已知实数  $x, y, z$  满足  $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3} = \frac{x+y+z}{3}$ , 求  $x+y+z$ .

4. 若非零常数  $a, b, c$  满足  $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a} = p$ , 求  $p$ .

**提示:** 将比例式的分子相加, 分母相加, 两个值相比, 结果为常数, 于是试试等比性质.

#### (选做) 拓展思维题

5. 已知  $x = \frac{4ab}{a+b}$  ( $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0, a+b \neq 0$ ), 利用比例性质求  $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b}$  的值.

**提示:** 由  $x = \frac{4ab}{a+b}$  有  $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$ , 构造出  $\frac{x+2a}{x-2a}$ ; 由  $x = \frac{4ab}{a+b}$  又有  $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$ , 构造出  $\frac{x+2b}{x-2b}$ .

## 2. 分式的变形

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 已知  $\frac{x}{y} = 2$ , 求  $\frac{5x-y}{3x+2y}$ ,  $\frac{2x^2-y^2}{x^2+2xy-3y^2}$ .

2. 已知  $\frac{2x+y}{x-3y} = -5$  ( $y \neq 0$ ), 求  $\frac{x}{y}$ .

3. 正数  $a$ 、 $c$  满足  $a^2 - ac - 2c^2 = 0$ , 求  $\frac{3c+5a}{a-c}$ .

4. 已知  $x_1 > x_2 > -5$ , 求证:  $\frac{1-2x_1}{x_1+5} < \frac{1-2x_2}{x_2+5}$ .

5. 函数  $f(x) = x + \frac{4}{x}$  ( $x > 0$ ), 解决下列两个问题:

(1) 设  $x_1 > x_2 \geq 2$ , 比较  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$  的大小;

(2) 用配方法证明  $f(x)$  的最小值为 4.

6. 试把  $\frac{4x+5}{(x-1)(2x+1)}$  拆为  $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+1}$  的形式, 其中  $A$ ,  $B$  为实数.

7. 已知函数  $y = \frac{x-1}{2x-3}$ ,

- (1) 将其解析式化为  $y = a + \frac{b}{2x-3}$  的形式;
- (2) 是否存在整数  $x$ , 使  $y$  为整数?
- (3) 当正数  $x$  不断增大并趋近于无穷大时,  $y$  会趋近于哪个常数?

**(选做) 拓展思维题**

8. 用简便方法计算:  $\frac{x^3 + x^2 + x}{x+1} - \frac{x^3 + 2x^2 - 3x - 7}{x+2} - \frac{4x+11}{x+3}$  (分母可保留积的形式).

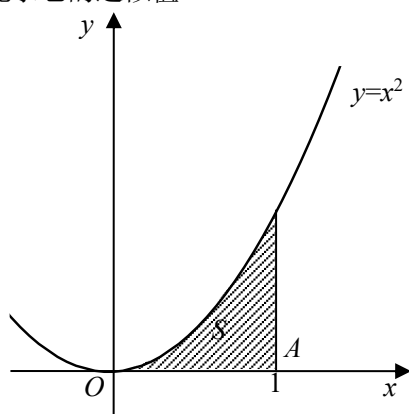
9. 已知函数  $y = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$ ,

- (1) 若函数图象过点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , 且  $0 < x_1 < x_2 < 1$ , 试比较  $y_1$  与  $y_2$  的大小;
- (2) 若  $x > 0$ , 求函数的最大值.

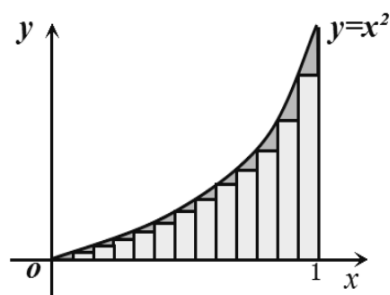
10. 已知函数  $y = \frac{x^3 - 12x^2 - 42}{x-3}$ ,

- (1) 将  $y = \frac{x^3 - 12x^2 - 42}{x-3}$  化为  $y = mx^2 + nx + p + \frac{q}{x-3}$  的形式,
- (2) 有多少个整数  $x$ , 使  $y$  也是整数?

11. 由抛物线  $y = x^2$  与直线  $x = 1$ ,  $y = 0$  所围成的平面图形的面积  $S$ ,  $S$  必然是一个定值, 为了求得它, 先求它的近似值.



(图 1)



(图 2)

### 步骤 1、分割

将线段  $OA$  分成  $n$  等份 ( $n$  为大于 2 的正整数), 得到  $n$  条长度相等的小线段, 也可以这样说, 将区间  $[0, 1]$  等分成  $n$  个小区间  $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ ,  $\dots$ , 即

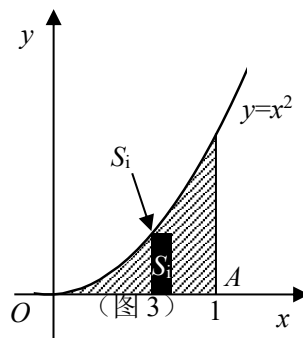
第 3 个小区间是 \_\_\_\_\_,  $\dots$

第  $i$  个小区间是 \_\_\_\_\_,  $\dots$

第  $n$  个小区间是 \_\_\_\_\_,  $\dots$

每个区间的长度为 \_\_\_\_\_,

过各个区间端点作  $x$  轴的垂线, 从而得到  $n$  个小矩形, 如图 2. 图 3 展示的是第  $i$  个小矩形的画法, 所有矩形都是这样得到.



### 步骤 2、用 $S_n$ 近似代替 $S$

第  $i$  个小矩形的面积  $S_i = \frac{1}{n} x_{i-1}^2$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ),

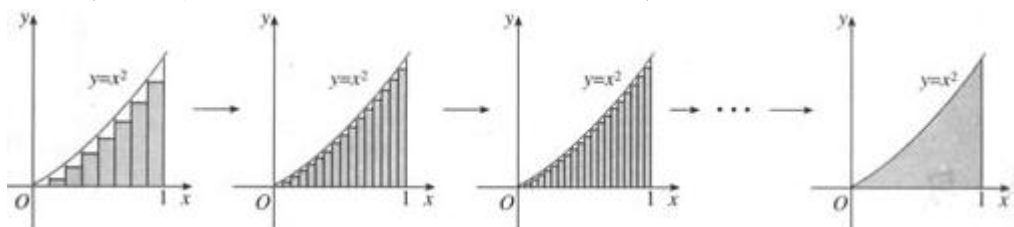
这  $n$  个小矩形的面积之和为  $S_n = \frac{1}{n} (x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)$  (结果只含  $n$ , 可保留括号).

这  $n$  个小矩形面积之和就是  $S$  的近似值.

提示:  $1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1)$ ,  $m$  为正整数.

### 步骤 3、取极限, 推导 $S$ 的值

用面积  $S_n$  近似代替面积  $S$ , 分割的越多, 即  $n$  越大,  $S_n$  就越逼近  $S$ . 请你推出  $S$  的值.



### 步骤 4、换个做法

如图, 展示的是第  $i$  个小矩形另一种画法, 此时  $n$  个矩形的面积和为  $S'_n$ , 请写出  $S'_n$  的表达式, 并推出  $S$  的值.



### 3. 分式方程与分式不等式

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 解分式方程:

$$(1) \frac{1}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} = 1;$$

$$(2) \frac{5x+17}{x^2+7x+12} = \frac{5x+13}{x^2+7x+10}.$$

提示: 第 (2) 问可利用比例性质.

2. 已知  $m$  为常数, 对于任意的  $x$  ( $x \neq -\frac{1}{2}$ ),  $\frac{mx-3}{2x+1}$  均为常数, 该常数是多少?

3. 解不等式:  $\frac{4x+1}{x+1} < 3$ .

4. 解下列不等式:

$$(1) \frac{2}{|2x-1|} > 3; \quad (2) \left| \frac{x}{1+x} \right| > 1.$$

**(选做) 拓展思维题**

5. 解下列方程:  $\frac{8(x^2+2x)}{x^2-1} + \frac{3(x^2-1)}{x^2+2x} = 11$ .

提示: 将  $\frac{x^2+2x}{x^2-1}$  视为整体, 采用换元法.

## 第4章 二次根式

### 1. 二次根式的化简

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 当  $a < 0, b < 0$  时,  $-a + 2\sqrt{ab} - b$  可变形为 ( ).

A.  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$       B.  $-(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$       C.  $(\sqrt{-a} + \sqrt{-b})^2$       D.  $(\sqrt{-a} - \sqrt{-b})^2$

2. 已知  $a < 0, b < 0, c < 0$ , 化简下列根式: (1)  $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ; (2)  $\sqrt{ab^3}$ ; (3)  $\sqrt{\frac{a^2b}{c}}$ .

3. 合并下列各式中的同类根式:

(1)  $\sqrt{12} - \sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{18}$ ;

(2)  $\sqrt{2x} + \sqrt{2a^2x^3} + \sqrt{50xy^2}$  ( $a > 0, y > 0$ ).

4. 化简:  $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}}$ .

5. 化简:  $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$  (其中  $x \geq 1$ )

6. 化简:  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

7. 若  $0 < x < 1$ , 化简  $\sqrt{(x - \frac{1}{x})^2 + 4} - \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 4}$ .

(选做) 拓展思维题

8. 已知  $x - 2\sqrt{xy} - 3y = 0$  且  $x > 0, y > 0$ , 求  $\frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y}$  的值.

提示: 本题类似已知  $a^2 - 2ab - 3b^2 = 0$ , 求  $\frac{2a^2 + ab + 3b^2}{a^2 + ab - b^2}$ .

9. 设  $a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}, b = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ ,

(1) 求  $(a + b)^3 + 3(a + b) - 4$  的值;

(2) 证明  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$ .

## 2. 分母有理化与分子有理化

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 化简: (1)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ; (2)  $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ; (3)  $\frac{7+4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ .

2. 比较下列各组数的大小:

(1)  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  和  $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ; (2)  $\sqrt{23} - \sqrt{21}$  和  $\sqrt{21} - \sqrt{19}$ ; (3)  $\sqrt{n+2} - \sqrt{n}$  和  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$  ( $n \geq 1$ ).

提示: 第(1)问考虑比较它们的平方, 第(2)问通过分子有理化, 化“差”为“和”.

3. 求证:  $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9$

(选做) 拓展思维题

4. 已知  $a > |b|$ , 化简:  $a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ .

5. 当正数  $x$  无限增大时,  $y = \sqrt{x^2+x} - x$  的值会逼近于哪个常数?

### 3. 含根式的方程与不等式

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 解方程:  $\sqrt{x+7}=x-5$ .

2. 解方程:  $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-11}=7$ .

3. 解方程  $2x^2+x-5\sqrt{2x^2+x}=6$ .

4. 解方程  $\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$ .

5. 解下列不等式:  $\sqrt{x^2-1}\geq x-2$ .

6. 解下列不等式:  $\sqrt{x^2-1}<x-2$ . 提问: 第 5、6 题的  $x$  的范围合并起来是全体实数吗?

(选做)拓展思维题

7. 解关于  $x$  的方程  $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}x - a - \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = 0$ , 其中  $a$  为常数, 且  $a > 0$ .

8. 化简二元方程  $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 3$ , 使结果不含根式.

9. (1) 求证:  $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$  ( $k \geq 1$ ).

(2) 设  $n$  为一自然数, 若  $n < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{100}} < n+1$ , 求  $n$ .

10. 动点  $P(x, y)$

(1) 点  $P$  到  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  的距离之差为 2, 试写出  $x, y$  满足的等式.  $y$  是否是关于  $x$  的函数? 如果是, 试写出函数关系式, 并说明函数类型, 如果不是, 说明理由;

(2) 点  $P$  到  $(a, b)$ ,  $(-a, -b)$  的距离之差为  $m$  ( $a, b, m$  均为正的常数), 写出  $x, y$  满足的等式, 当  $a, b$  满足何种条件时,  $y$  是关于  $x$  的反比例函数?

## 第5讲 二次方程

### 1. 韦达定理的综合应用

(可先学习附件中电子版教程或观看B站视频)

1. 若  $m < 0$ ,  $n < 0$ , 则关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + mx + n = 0$  ( ).  
A. 有两个异号的实数根, 正根的绝对值较大      B. 有两个负的实数根  
C. 有两个异号的实数根, 负根的绝对值较大      D. 有可能无实数根
2. 如果两个不相等的实数  $x_1$ 、 $x_2$  分别满足  $x_1^2 - 2x_1 = 1$ ,  $x_2^2 - 2x_2 = 1$ , 那么  $x_1x_2$  等于\_\_\_\_\_.
3. 设方程  $x^2 - 5x + 6 = 0$  的两个根为  $\alpha$  和  $\beta$ , 不解方程, 求: (1)  $\alpha^2 + \beta^2$ ; (2)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ .
4. 设方程  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  的两个根为  $x_1$  和  $x_2$ , 不解方程, 求:  
(1)  $(x_1 - x_2)^2$ ; (2)  $x_1^3 + x_2^3$ .
5. 设方程  $x^2 - 6x + 7 = 0$  的两个根为  $p$  和  $q$ , 不解方程, 求:  
(1)  $p^2 - q^2$ ; (2)  $3p + 2q$ .
6. 将下列二次式在实数范围内分解因式.  
(1)  $x^2 - 4x - 3$ ; (2)  $2x^2 + x - 4$ .
7. 将下列整式在实数范围内分解因式, 若无法分解因式则说明原因.  
(1)  $x^2 + 2x + 3$ ; (2)  $x^3 + 2x - 3$ .

8. 已知一个二次方程的两个根分别为 2 和 -3, 写出这个方程.

9. 若两个数的和为 5, 积为 -14, 构造以这两个为根的一元二次方程.

10. 设  $x_1, x_2, x_3$  为方程  $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$  的三个实数根, 求下列代数式的值:

①  $x_1 + x_2 + x_3$ ; ②  $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ ; ③  $x_1x_2x_3$ ; ④  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ .

(选做) 拓展思维题

11. 若  $a^2 - 3a = 1$ ,  $b^2 - 3b = 1$ , 且  $a \neq b$ , 求  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ .

12. 设实数  $s, t$  分别满足  $2026s^2 + 2031s + 1 = 0$ ,  $t^2 + 2031t + 2026 = 0$ , 并且  $st \neq 1$ . 求  $\frac{st + 2030s + 1}{t}$  的值.

13. 已知  $x, y$  是正整数, 并且  $xy + x + y = 23$ ,  $x^2y + xy^2 = 120$ , 求  $x^2 + y^2$ .



## 2. 二元二次方程组及其解法

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} y^2 = 3x + 1, \\ 3x - y = 1, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{cases}.$$

2. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} (x+y)^2 - 2(x+y) - 3 = 0, \\ x - y = -1, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 9x^2 - 4y^2 - 32 = 0, \\ 3x - 2y - 4 = 0, \end{cases} \quad (3) \begin{cases} (x+3)^2 + y^2 = 13 \\ x^2 + (y+3)^2 = 37 \end{cases}$$

**提示:** 第 (1) 问的第一个方程左边可分解因式; 第 (2) 问观察两个方程左边的整式有无联系.

3. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0, \\ xy = -4, \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 6xy = 5, \end{cases}$$

**提示:** 把方程组视为“两数之和”“两数之积”的形式.

(选做) 拓展思维题

4. 关于  $x$ 、 $y$  的二元二次方程组  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = k(x+1) \end{cases}$  共有几组解?

- A. 0                      B. 2                      C. 4                      D. 要依  $k$  的值来确定

5 关于  $x$ 、 $y$  的二元二次方程组  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2 - 2y^2 = k \end{cases}$  ( $k < -6$ ) 共有几组解?

- A. 0                      B. 2                      C. 4                      D. 要依  $k$  的值来确定

6. (1) 两个一元二次方程:  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ ,  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  有公共实数根, 求证:  $(q_2 - q_1)^2 - (p_2 - p_1)(p_1q_2 - q_1p_2)$  为定值.

(2) 利用第 (1) 问的结论求解方程组  $\begin{cases} x^2 - xy - 12y^2 = 8 \\ x^2 + xy - 10y^2 = 20 \end{cases}$ .

## 第6讲 函数及其图象

### 1、函数图象及其变换

(可先学习附件中电子版教程或观看B站视频)

1. 将函数  $y = \left| \frac{3}{2}x - 1 \right|$  写成分段函数的形式，并画出其简图，说明图象由哪几部分构成.

1. 将函数  $y = |x-1| + |x+1|$  写成分段函数的形式，并画出函数的图象. 说说  $y$  的几何意义以及  $y$  随  $x$  的增大而变化的规律.

2. 将函数  $y = |x-2| - |x+1|$  写成分段函数的形式，并画出函数的图象，并求出函数的最大值与最小值.

4. 画出函数  $y = 3x - 1$  的图象，

(1) 观察函数  $y = -(3x-1)$  的图象，你认为它与  $y = 3x-1$  的图象有何关系？

(2) 观察函数  $y = 3(-x)-1$  的图象，你认为它与  $y = 3x-1$  的图象有何关系？

5. 画出函数  $y = 2x - 3$  的图象，并利用图象变换画出下列两个函数的图象.

(1)  $y = |2x-3|$ ; (2)  $y = 2|x|-3$ .

6. 将函数  $y = |2x-3| + |x+1|$  写成分段函数的形式，并画出它的图象.

7. 将函数  $y=|2x+1|-|x-4|$  写成分段函数的形式，并画出它的图象.

8. 画出函数  $y=||x-1|-1|$  的图象.

**(选做) 拓展思维题**

9. 当满足下列条件时，画出函数  $y=x|a-x|$  的简图  
(1)  $a=0$ ; (2)  $a>0$ ; (3)  $a<0$ .

10. 已知函数  $y=|1-\frac{1}{x}|$ ,

(1) 画出该函数的图象;

(2) 当  $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$  时，求  $y$  的最小值和最大值;

(3) 是否存在  $a, b$ ，当  $a \leq x \leq b$  时， $y$  的最小值为  $a$ ，最大值为  $b$ .

## 2. 反比例函数的拓展

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 已知非零实数  $x$  的范围如下, 写出  $\frac{1}{x}$  的范围.

- (1)  $x \geq 2$ : \_\_\_\_\_; (2)  $x \leq 2$ : \_\_\_\_\_;  
(3)  $x \geq -2$ : \_\_\_\_\_; (4)  $x \leq -2$ : \_\_\_\_\_.

2. 已知  $\frac{1}{x}$  的范围, 写出  $x$  的范围.

- (1)  $\frac{1}{x} \geq 4$ : \_\_\_\_\_; (2)  $\frac{1}{x} \leq 4$ : \_\_\_\_\_;  
(3)  $\frac{1}{x} \geq -4$ : \_\_\_\_\_; (4)  $\frac{1}{x} \leq -4$ : \_\_\_\_\_.

3. 已知函数  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ .

- (1) 画出函数  $y = \frac{2x+3}{x+1}$  图象, 并指出其性质.  
(2) ①当  $x \geq -2$  时, 求  $y$  的值域.  
②当  $x \geq -2$  时, 且  $x$  只能为整数时,  $y$  有最大值和最小值吗?

4. 利用反比例函数或倒数法则求函数  $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$  的值域.

5. 利用反比例函数或倒数法则求下列函数的值域:

- (1)  $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ ; (2)  $y = \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ ; (3)  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} (x \geq 0)$ .

(选做) 拓展思维

6. 当  $x > -2$  时, 函数  $y = \frac{x}{x+a}$  满足  $y$  随  $x$  的增大而增大, 求  $a$  的取值范围.

7. 已知函数  $y = \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$ ,

(1) 将函数化为分段函数的形式; (2) 画出函数的图象; (3) 写出不等式  $\left| 1 - \frac{1}{x} \right| < \frac{2017}{2018}$  的解集.

8. 函数  $y = \frac{x - \sqrt{2018}}{x - \sqrt{2019}}$  ( $x$  为自然数),  $y$  是否有最大值 (或最小值)? 如果有, 求取最大值 (或最小值) 时的  $x$ ; 如果没有, 请说明理由.

### 3. 利用函数的图象求值域

(可先学习附件中电子版教程或观看 B 站视频)

1. 不画出函数  $y = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$  的图象, 研究  $y$  随  $x$  的增大而增大 (或减小) 的性质, 求它的值域.

2. (1) 设  $0 \leq x \leq 3$ , 讨论函数  $y = x^2 - 4x + 5$  的最大值和最小值.

(2) 设  $1 \leq x \leq 3$ , 讨论函数  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$  的最大值和最小值.

3. 求函数  $y = x^2 + 4\sqrt{1-x^2} + 1$  的值域.

**提示:** 这并不是二次函数, 且有一个根式, 有没有办法转化成二次函数?

4. 求下列函数的最大值与最小值, 以及取最值时的  $x$  值.

$$(1) y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}; \quad (2) y = x + \sqrt{x+1} (x \leq 1); \quad (3) y = 4 - x^2 - \sqrt{1-x^2}$$

(选做) 拓展思维题

5. 求函数  $y = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$  的值域. 下列两种思路至少一种是错的, 请指出来, 并写出正确的解法.

思路一: 将函数变形为  $y = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} + 1}$ , 得  $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

思路二:  $y^2 = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x} + 1$ , 先得  $y^2$  的范围, 有  $y^2 \geq \frac{3}{4}$ , 则  $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  或  $y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$6. y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

**提示:** 分子分母均有  $x$ , 考虑将分子的  $x$  移下来 (分子分母同除以  $x$ ), 放至根号内使之相对集中, 但需注意  $x$  为 0 和负数的情况:  $x=0$  时不能移下来,  $x<0$  时不能放入根号. 易错的做法是: ①  $y^2 = \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ , 求得  $y^2$  范围后, 再开方; ②  $\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ . 全然没有注意到  $x$  为负数与 0 的情况.

7. 动点  $M(x, y)$  在直线  $l: y = kx + b$  上, 定点  $P(x_0, y_0)$  在直线  $l$  外,

(1) 写出  $PM^2$  的表达式, 并整理为关于  $x$  的二次函数形式;

(2) 求证  $PM$  的最小值为  $\frac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{k^2 + 1}}$ .

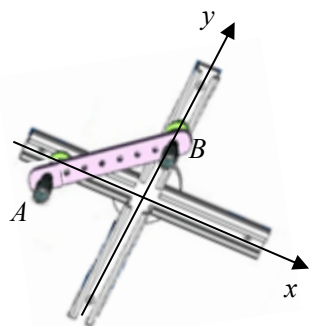
说明: 本题就是求点到直线的距离, 显然  $PM$  最小值的表达式可用含字母  $k, b, x_0, y_0$  表示.



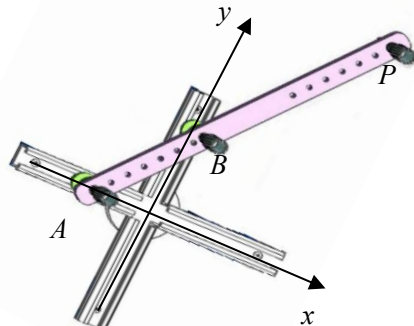
8. 曾老师在网上看了一段视频想与你分享，由于现在没法展示动画，那就让我描述给你听吧。

在如下的立体图 1 中，连接杆被两个滑块  $A, B$  带动，滑块  $A, B$  在十字槽中直线滑动，滑块  $A$  沿  $x$  轴移动，滑块  $B$  沿  $y$  轴移动。

初始位置是： $B$  在原点， $A$  在  $x$  轴负半轴，在一个周期内  $A, B$  按以下两步运动：



(图 1)



(图 2)

- ① 点  $A$  在  $x$  轴上从最左端运动到最右端，同时点  $B$  自原点向  $y$  轴正方向运动再回到原点；
- ② 点  $A$  在  $x$  轴上从最右端运动到最左端，同时点  $B$  自原点向  $y$  轴负方向运动再回到原点。

那么问题来了：

(1) 若  $AB$  的长为 10 米，在一个周期内  $AB$  的中点运动的轨迹是什么？

(2) 除了  $A, B$  及中点，直线  $AB$  上其他点的轨迹会如何呢？请研究并回答：

如图 2，点  $P(x, y)$  在  $AB$  的延长线上，设  $AP=a, BP=b$  ( $a>b$ )，当点  $P$  在第一象限时，试求  $y$  关于  $x$  的关系式，并写出  $x$  和  $y$  的取值范围。

(3) 在 (2) 的条件下，设  $a=3, b=2$ ，点  $M(0, m)$ ，试写出点  $P$  到点  $M$  的距离  $PM$  的平方，即  $PM^2$  的表达式，并整理为关于  $y$  的二次函数形式，并写出  $y$  的取值范围。

(4) 在 (2) (3) 的条件下，若点  $P$  到点  $M$  的距离的最小值为 1，求点  $M$  的坐标。



<https://space.bilibili.com/678217479>

若练习有困难，可通过视频学习（左二维码），或自行打印教程学习（文件夹内）。注意正规教程不要网上传播（见右二维码）。



<http://shop178314518.taobao.com>