

第一讲 绝对值

1. 数轴上两点间的距离

1. 【答案】C.

【解析】A 选项: $-1 > -2$, 但 $|-1| < |-2|$, 所以 A 错; B 选项: $|2| > -3$, 但 $2^2 < (-3)^2$, 所以 B 错; C 选项, 因为 $a > |b|$, 又 $|a| \geq a$, 所以 $|a| > |b|$, 所以 $a^2 > b^2$; D 选项: $-2 \neq |2|$, 但 $(-2)^2 = 2^2$, 所以 D 错.

2. 【答案】D.

【解析】问题可化为: 在数轴上有四点 A、B、C、D, 其对应的值分别是 -1、-2、-3、-4, 求一点 P, 使 $PA+PB+PC+PD$ 最小. 由于 $PA+PD$ 是当 P 点在线段 AD 上取得最小值 3, $PB+PC$ 是当 P 在线段 BC 上取得最小值 1, 故 $PA+PB+PC+PD$ 的最小值是 4.

3. 【解析】由 $PA:PB=1:4$ 有 $[x-(-3)]:(7-x)=1:4$, 解得: $x=-1$.

4. 【解析】点 P 在 B 右侧, 由 $AP:PB=5:2$ 有 $(x-a):(x-b)=5:2$, 解得: $x=\frac{5b-2a}{3}$.

思维拓展题

5. 【解析】(1) 因为 $PA:PB=t:1$, 所以 $(x-a):(b-x)=t:1$, 所以 $t(b-x)=x-a$, 所以 $(t+1)x=a+tb$, 所以 $x=\frac{a+tb}{t+1}$. (2) 由 (1) 有 $x_p=\frac{x_1+tx_2}{t+1}$, $y_p=\frac{y_1+ty_2}{t+1}$, 所以点 P 的坐标为 $(\frac{x_1+tx_2}{t+1}, \frac{y_1+ty_2}{t+1})$.

2. 分类讨论去掉绝对值符号

1. 【解析】由 $x+4=0$, $x-2=0$ 有 $x=-4$, $x=2$, 分三种情况讨论:

(1) 当 $x < -4$ 时,

$$|x+4|-|x-2|=(-x-4)-(-x+2)=-6;$$

(2) 当 $-4 \leq x < 2$ 时,

$$|x+4|-|x-2|=(x+4)-(-x+2)=2x+2;$$

(3) 当 $x \geq 2$ 时,

$$|x+4|-|x-2|=(x+4)-(x-2)=6.$$

2. 【解析】由 $2x-1=0$, $x+3=0$ 有 $x=\frac{1}{2}$, $x=-3$, 分三种情况讨论:

(1) 当 $x < -3$ 时,

$$|2x-1|+|x+3|=(-2x+1)+(-x-3)=-3x-2;$$

(2) 当 $-3 \leq x < \frac{1}{2}$ 时,

$$|2x-1|+|x+3|=(-2x+1)+(x+3)=-x+4;$$

(3) 当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时,

$$|2x-1|+|x+3|=(2x-1)+(x+3)=3x+2.$$

思维拓展题

3. 【解析】由 $3x+6=0$, $x-4=0$, $x=0$ 有 $x=-2$, $x=4$, $x=0$, 分四种情况讨论:

(1) 当 $x < -2$ 时, $|3x+6|-|x-4|+|x|=(-3x-6)-(-x+4)+(-x)=-3x-10;$

(2) 当 $-2 \leq x < 0$ 时, $|3x+6|-|x-4|+|x|=(3x+6)-(-x+4)+(-x)=3x+2;$

(3) 当 $0 \leq x < 4$ 时, $|3x+6|-|x-4|+|x|=(3x+6)-(x-4)+x=5x+2;$

(4) 当 $x \geq 4$ 时, $|3x+6|-|x-4|+|x|=(3x+6)-(x-4)+x=3x+10.$

3、含绝对值的方程和不等式

1. 【答案】D.

【解析】方法一：当 $x \geq 2$ 时，不等式等价于 $1 \leq x-2 \leq 7$ ，所以 $3 \leq x \leq 9$ ；当 $x < 2$ 时，不等式等价于 $1 \leq 2-x \leq 7$ ，所以 $-7 \leq x-2 \leq -1$ ，即 $-5 \leq x \leq 1$ 。所以 $-5 \leq x \leq 1$ 或 $3 \leq x \leq 9$ 。方法二：不等式 $1 \leq |x-2| \leq 7$ 表示 x 和 2 的距离不小于 1，不大于 7，在数轴画出到 2 的距离等于 1 以及等于 7 的点，后略。

2. 【答案】 $-2 \leq x_1 - x_2 < 0$ 。

【解析】由 $|x-1|+|x+1|=2$ 的几何意义得 $-1 \leq x \leq 1$ ，所以 $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 。方法一：
$$\begin{cases} -1 \leq x_1 \leq 1 & \text{①} \\ -1 \leq x_2 \leq 1 & \text{②} \\ x_1 < x_2 \end{cases}$$
。由

②得 $-1 \leq -x_2 \leq 1$ ③，①+③得 $-2 \leq x_1 - x_2 \leq 2$ ，又 $x_1 < x_2$ ，所以 $-2 \leq x_1 - x_2 < 0$ 。方法二：在数轴上画出点 x_1, x_2 对应的点，两者在 -1 和 1 之间的任意位置，且 x_2 在 x_1 的右边，所以两者之间的距离满足 $0 < x_2 - x_1 \leq 2$ ，所以 $-2 \leq x_1 - x_2 < 0$ 。

3. 【解析】方法一：(1) 当 $x \geq 2$ 时，方程可化为 $(x-2)+(x+1)=5$ ，即 $2x-1=5$ ，解得 $x=3$ ，符合条件；

(2) 当 $-1 < x < 2$ 时，方程可化为 $-(x-2)+(x+1)=5$ ，即 $3=5$ ，无解；

(3) 当 $x \leq -1$ 时，方程可化为 $-(x-2)-(x+1)=5$ ，即 $-2x+1=5$ ，解得 $x=-2$ ，符合条件。

综上，原方程的解为 $x=3$ 或 $x=-2$ 。

方法二： $|x-2|+|x+1|=5$ 表示数轴上 x 到 2 和 -1 的对应点距离和为 5，

由数轴知， $2-(-1)=3$ ，即 2 与 -1 的对应点之间的距离为 3，所以该点在 2 对应点的右边或 -1 对应点的左边 1 个单位处，即 $x=3$ 或 $x=-2$ 。

4. 【解析】不等式可化为 (1) $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ 4-x < \frac{x}{2}+1 \end{cases}$ 或 (2) $\begin{cases} -3 < x < \frac{1}{2}, \\ 3x+2 < \frac{x}{2}+1 \end{cases}$ 或 (3) $\begin{cases} x \leq -3, \\ x-4 < \frac{x}{2}+1. \end{cases}$

所以由 (1) 得 $x > 2$ ；由 (2) 得 $-3 < x < -\frac{2}{5}$ ；由 (3) 得 $x \leq -3$ 。

综上， $x < -\frac{2}{5}$ 或 $x > 2$ 。

故原不等式的解集为： $1 \leq x \leq 3$ 或 $x = -2$ 。

5. 【解析】(1) 原不等式可化为： $2x-4 \geq x+2$ 或 $2x-4 \leq -x-2$ ，故原不等式的解集为： $x \geq 6$ 或 $x \leq \frac{2}{3}$ 。

(2) 原不等式可化为： $-x-2 < 2x-4 < x+2$ ，故原不等式的解集为： $\frac{2}{3} < x < 6$ 。

6. 【解析】方法一：两边平方，得 $x^2-2x+1 < x^2+4x+4$ ，所以 $x > -\frac{1}{2}$ 。方法二： $|x-1| < |x+2|$ 表示数轴上 x 到 1 的对应点距离小于到 -2 的对应点距离，由数轴知， x 在 1 与 -2 的对应点的中点的右侧，所以 $x > -\frac{1}{2}$ 。

7. 【解析】由 $2x+1=0$ ， $x-3=0$ ， $x-6=0$ 分别求得： $x = -\frac{1}{2}$ ， $x = 3$ ， $x = 6$ 。

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时，方程可化为 $-(2x+1)+(x-3)-(x-6)=6$ ，即 $-2x+2=6$ ，解得 $x=-2$ ；

当 $-\frac{1}{2} \leq x < 3$ 时，方程可化为 $(2x+1)+(x-3)-(x-6)=6$ ，即 $2x+4=6$ ，解得 $x=1$ ；

当 $3 \leq x < 6$ 时，方程可化为 $(2x+1)-(x-3)-(x-6)=6$ ，即 $10=6$ ，无解；

当 $x \geq 6$ 时，方程可化为 $(2x+1)-(x-3)+(x-6)=6$ ，即 $2x-2=6$ ，解得 $x=4$ （不符，舍去）。

综上所述, $x=-2$ 或 $x=1$.

(2) 当 $x \leq 1$ 时, 原方程可化为 $x^2+1-x=11$, 即 $x^2-x-10=0$,

所以 $x = \frac{1-\sqrt{41}}{2}$ 或 $x = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$ (舍去).

当 $x > 1$ 时, 原方程可化为 $x^2+x-1=11$, 即 $x^2-x-12=0$,

所以 $x=3$ 或 $x=-4$ (舍去).

综上所述, $x=3$ 或 $x = \frac{1-\sqrt{41}}{2}$.

(3) 不等式可化为 $\begin{cases} x \geq 4, \\ x+5 > 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 4, \\ 3x-3 > 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2}, \\ -x-5 > 2 \end{cases}$.

解之得 $x < -7$ 或 $x > \frac{5}{3}$.

8. 【答案】B.

【解析】原方程等价于 $|x|^2 - 2025a|x| - 2030 = 0$, 设 $t = |x|$ ($t \geq 0$), 则方程可化为 $t^2 - 2025at - 2030 = 0$ ($t \geq 0$), 因为 $\Delta > 0$ 且 $-2010 < 0$, 所以 t 有一正一负两根 (只取非负根). 所以 $|x|$ 等于 t 的正根, 所以 x 有一正一负两根.

9. 【解析】原不等式化为 $|2x+3| < a+1$, 接下来对 $a+1$ 的正负进行讨论.

当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, 不等式无解.

当 $a+1 > 0$, 即 $a > -1$ 时, 不等式可化为 $-a-1 < 2x+3 < a+1$, 解得 $-\frac{a+4}{2} < x < \frac{a-2}{2}$.

综上, 当 $a \leq -1$ 时, 不等式无解; 当 $a > -1$ 时, 不等式的解集为 $-\frac{a+4}{2} < x < \frac{a-2}{2}$.

10. 【解析】(1) 当 $x \geq -\frac{1}{2}$ 时, 方程可化为 $(2x+1)-(x+2)=a$, 解得 $x=1+a$.

由 $a+1 \geq -\frac{1}{2}$ 得 $a \geq -\frac{3}{2}$. (这表明 $a \geq -\frac{3}{2}$ 时, $x=1+a$ 是原方程的根)

(2) 当 $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$ 时, 方程可化为 $-(2x+1)-(x+2)=a$, 解得 $x = -\frac{a+3}{3}$.

由 $-2 \leq -\frac{a+3}{3} < -\frac{1}{2}$ 得 $-\frac{3}{2} < a \leq 3$. (这表明 $-\frac{3}{2} < a \leq 3$ 时, $x = -\frac{a+3}{3}$ 是原方程的根)

(3) 当 $x < -2$ 时, 方程可化为 $-(2x+1) + (x+2) = a$, 解得 $x=1-a$.

由 $1-a < -2$ 得 $a > 3$. (这表明 $a > 3$ 时, $x=1-a$ 是原方程的根)

综上, 当 $a > 3$ 时, 原方程的解为 $x=1-a$ 或 $x=1+a$;

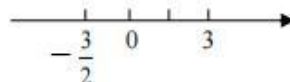
当 $-\frac{3}{2} < a \leq 3$ 时, 原方程的解为 $x=1+a$ 或 $-\frac{a+3}{3}$;

当 $a = -\frac{3}{2}$ 时, 原方程的解为 $-\frac{1}{2}$.

当 $a < -\frac{3}{2}$ 时, 原方程的无解.

注: 当 $a=3$ 时, $-\frac{a+3}{3}$ 与 $1-a$ 相等.

接下来, 按 a 分类
呈现答案



第二讲 整式

1. 介绍几个乘法公式

1. 【答案】(1) $x^2 + (2y+3)x + (y^2 + 4y + 5)$; (2) $y^2 + (2x+4)y + (x^2 + 3x + 5)$.

2. 【答案】 $8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$.

【解析】使用完全立方公式展开.

3. 【答案】 $m^3 - n^3$.

【解析】利用立方差公式 $(m-n)(m^2 + mn + n^2) = m^3 - n^3$.

4. 【答案】 $6a^2b + 2b^3$.

【解析】展开后消去同类项.

5. 【答案】 $(2x-3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$.

【解析】应用立方差公式 $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3$.

6. 【答案】 $(a-b+c)^2$.

【解析】 $a^2 + b^2 + c^2 - 2bc + 2ca - 2ab = a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ca = [a + (-b) + c]^2$.

7. 【解析】(1) $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号,

所以 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号,

所以当 $a=b$ 时, $a^2 + b^2 = 2ab$; 当 $a \neq b$ 时, $a^2 + b^2 > 2ab$.

(2) $(a^2 + b^2 + c^2) - (2ab + 2bc - 2ca) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca =$
 $= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ca = [a + (-b) + c]^2 \geq 0$,

所以 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc - 2ca$.

8. 【解析】 $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 8$.

9. 【解析】 $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 125 - 90 = 35$.

拓展思维题

10. 【解析】(1) 原式 $= [(x+y)(x^2 - xy + y^2)]^2 = (x^3 + y^3)^2 = x^6 + y^6 + 2x^3y^3$.

(2) 解: 原式 $= (x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)(x^9 - 1) - 2^{18}$

$$= (x^9 + 1)(x^9 - 1) - 2^{18}$$

$$= x^{18} - 1 - 2^{18}$$

因为 $x = 2$,

所以原式 $= -1$.

11. 证明: 要证 $a+b \leq 2$, 只要证 $(a+b)^3 \leq 8$,

只要证明 $a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \leq 8$, 又 $a^3 + b^3 = 2$,

故只要证明 $a^2b + ab^2 \leq 2$,

即证 $a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3$, (*)

作差 $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) = (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) = (a+b)(a-b)^2$,

若 $a+b < 0$, 则必然有 $a+b \leq 2$;

若 $a+b \geq 0$, 则 $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, 即 $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) \geq 0$, 所以 $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$, (*) 成立, 所以 $a+b \leq 2$.

综上, $a+b \leq 2$.

点评: 实际上, 若 $a+b < 0$, 则 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, 但 $a^2 - ab + b^2 = (a - \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} > 0$, 所以 $a^3 + b^3 < 0$, 这与 “ $a^3 + b^3 = 2$ ” 矛盾. 因此本题的条件隐含 $a+b \geq 0$.

12. 【解析】(1) 构造锐角为 θ 的直角三角形, 设 θ 的对边为 a , 邻边为 b , 则斜边为 $\sqrt{a^2 + b^2}$,

所以 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}})^2 = 1$.

$$(2) \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}[(\sin \theta + \cos \theta)^2 - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)] = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) = t(1 - \frac{t^2 - 1}{2}) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t.$$

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta = 1 - 2(\frac{t^2 - 1}{2})^2 = -\frac{1}{2}t^4 + t^2 + \frac{1}{2}.$$

(3) 易知 $2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta = (\sin \theta - \cos \theta)^2 \geq 0$,
当且仅当 $\sin \theta = \cos \theta$ 时取等号.

所以 $2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \geq (\sin \theta + \cos \theta)^2$, 当且仅当 $\sin \theta = \cos \theta$ 时取等号.

又 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, 所以 $2 \geq (\sin \theta + \cos \theta)^2$, 当且仅当 $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

所以 $|\sin \theta + \cos \theta| \leq \sqrt{2}$, 即 $\sin \theta + \cos \theta \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取到等号.

所以当 $\sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $\sin \theta + \cos \theta$ 有最大值 $\sqrt{2}$.

2、补充几个分解因式的方法

1. 【解析】(1)(2)(3) 的十字相乘如下图:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \\ 3 \quad -4 \\ \hline -6 - 4 = -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ 5 \quad -3 \\ \hline 10 - 3 = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -2 \\ 2 \quad 3 \\ \hline -4 + 6 = 2 \end{array}$$

所以 $3x^2 - 10x + 8 = (x-2)(3x-4)$;

$5x^2 + 7x - 6 = (x+2)(5x-3)$;

$4x^2 + 2x - 6 = (2x-2)(2x+3)$;

2. 【解析】(1) 原式 $= (2ax - 10ay) + (5by - bx) = 2a(x-5y) - b(x-5y) = (x-5y)(2a-b)$

法二: 原式 $= (2ax - bx) + (5by - 10ay) = x(2a-b) - 5y(2a-b) = (2a-b)(x-5y)$

(2) 原式 $= (2by - 2ay - 2cy) + (ax + cx - bx) = -2y(a-b+c) + x(a-b+c) = (a-b+c)(-2y+x)$.

(3) 原式 $= (x^2 - y^2) - (x^2y - xy^2) - (x-y) = (x-y)(x+y) - xy(x-y) - (x-y) = (x-y)(x+y-xy-1)$

$= (x-y)[(x-xy) + (y-1)] = (x-y)[x(1-y) - (1-y)] = (x-y)(1-y)(x-1)$.

3. 【解析】(1) 将 $x=1$ 代入多项式得 $1-3+2=0$, 故有因式 $x-1$,

所以 $x^3 - 3x + 2 = x^3 - x^2 + x^2 - x - 2x + 2 = x^2(x-1) + x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x-1)^2(x+2)$.

(2) 将 $x=2$ 代入多项式得 $8+16-14-10=0$, 故有因式 $x-2$,

所以 $x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = x^2(x-2) + 6x(x-2) + 5(x-2) = (x-2)(x^2+6x+5) = (x-2)(x+1)(x+5)$.

4. 【解析】(1) 方程 $2x^3 - 5x^2 + x + 3 = 0$ 所有可能的有理根为 $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$, 最终确定 $x = \frac{3}{2}$ 是方程的

根, 因此多项式含有因式 $x - \frac{3}{2}$, 所以含有因式 $2x-3$.

所以 $2x^3 - 5x^2 + x + 3 = (2x-3)x^2 - 2x^2 + 3x - 2x + 3 = (2x-3)x^2 - (2x-3)x - (2x-3) = (2x-3)(x^2 - x - 1)$.

(2) 数尽方程 $-3x^3 + 8x^2 + 5x - 6$ 所有可能的有理根, 最终确定 $x = -1$ 是方程的根, 因此多项式含有因式 $x+1$.

所以 $-3x^3 + 4x^2 + x - 6 = -(x+1) \cdot 3x^2 + 11x^2 + 5x - 6 = -(x+1) \cdot 3x^2 + (x+1) \cdot 11x - 6(x+1) = -(x+1)(3x^2 - 11x + 6)$
 $= -(x+1)(3x-2)(x-3)$.

5. 【解析】设 $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$,

展开右边得 $x^4 + (a+b)x^3 + (ab+2)x^2 + (a+b)x + 1$,

对比系数得, $a+b=0, ab+2=1, a+b=0$,

解得 $a=1, b=-1$, 或 $a=-1, b=1$ (取一种即可).

所以 $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

拓展思维题

6.【解析】 $(ax+by)-(bx+ay)=(ax-bx)-(ay-by)=x(a-b)-y(a-b)=(a-b)(x-y)$, 因为 $a < b$, $x < y$, 所以 $a-b < 0, x-y < 0$, 所以 $(ax+by)-(bx+ay) > 0$, 即 $ax+by > bx+ay$.

7.【解析】设 $2^{m+11n}=(2^{2m+n})(8^{m-3n})^y$, 所以 $2^{m+11n}=2^{(2x+3y)m+(x-9y)n}$, 所以 $2x+3y=1, x-9y=11$, 解得 $x=2, y=-1$, 所以 $2^{m+11n}=(2^{2m+n})^2 \div (8^{m-3n}) = \frac{a^2}{b}$. (采用了待定系数法分析, 书写可省去这一过程)

8.【解析】因为 $\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=2 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} x=1-3z \\ y=1+4z \end{cases}$.

所以 $s=2(1-3z)+(1+4z)-z$, 即 $s=3-3z$.

因为 $x \geq 0, y \geq 0$, 所以 $1-3z \geq 0, 1+4z \geq 0$, 所以 $-\frac{1}{4} \leq z \leq \frac{1}{3}$.

又 $z \geq 0$, 所以 $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$.

所以 $s=3-3z$, 且 $0 \leq z \leq \frac{1}{3}$.

3、配方法

1.【答案】C.

【解析】 $a^2+2b^2+c^2-2b(a+c)=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)=(a-b)^2+(b-c)^2=0$, 所以 $a=b=c$.

2.【答案】(3, -4).

【解析】

$$x^2-6x+y^2+8y+25=(x^2-6x+9)+(y^2+8y+16)=(x-3)^2+(y+4)^2=0.$$

当且仅当 $x=3, y=-4$ 时成立.

3.

答案: 最小值 5, 当 $x=4, y=-3$ 时取得.

解析:

$$x^2-8x+y^2+6y+30=(x^2-8x+16)+(y^2+6y+9)+5=(x-4)^2+(y+3)^2+5$$

。

当 $x=4, y=-3$ 时, 最小值为 5.

4.【答案】

解析:

$$m^2-2mn+3n^2+4=(m^2-2mn+n^2)+2n^2+4=(m-n)^2+2n^2+4.$$

平方项均非负, 故原式 $\geq 4 > 0$.

拓展思维题

5.【解析】 $2x^2-8xy+9y^2-2y+4$

$$=2x^2-8y \cdot x+(9y^2-2y+4)$$

$$=2(x-2y)^2+(y^2-2y+4)$$

$$=2(x-2y)^2+(y-1)^2+3$$

所以, 当 $x=2, y=1$ 时, $2x^2-8xy+9y^2-2y+4$ 有最小值 3.

6.【解析】 $y_1-y_2=(x_1^3+x_1)-(x_2^3+x_2)$

$$=(x_1^3-x_2^3)+(x_1-x_2) \quad (\text{相似结构合为一组, 为分解因式作准备})$$

$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+(x_1-x_2)$$

$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_2x_1+x_2^2+1)$$

(以 x_1 为主元降幂排列, 给 $x_1^2+x_2x_1$ 配上 $(\frac{x_2}{2})^2$ 成为完全平方式)

$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_2x_1+\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}+x_2^2+1)$$

$$=(x_1-x_2)[(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2+1]$$

$$=(x_1-x_2)\{[(x_1+\frac{1}{2}(x_2-3))]^2+\frac{3}{4}(x_2-1)^2\}$$

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$,

又 $(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1 \geq 1 > 0$,

所以 $[(x_1 + \frac{1}{2}(x_2-3))]^2 + \frac{3}{4}(x_2-1)^2 < 0$,

所以 $y_1 < y_2$.

第三章 分式

1. 两个比例性质

1. 【解析】因为 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 所以 $\frac{3a}{3b} = \frac{2c}{2d} = \frac{a}{b}$, 因为 $3b+2d \neq 0$, 所以由等比性质有 $\frac{3a+2c}{3b+2d} = \frac{a}{b}$.

2. 【解析】由等比性质得, $k = \frac{(a+3)+(7-a)}{(b-2)+(4-b)} = \frac{10}{2}$, 所以 $k=5$.

3. 【解析】由已知有 $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3} = \frac{-(x+y+z)}{-3}$.

①若 $(x+1)+(y+2)+(z+3)+(-3) \neq 0$, 即 $x+y+z \neq -3$,

则由等比性质有 $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3} = \frac{x+y+z-(x+y+z)}{(x+1)+(y+2)+(z+3)-3} = 0$,

所以 $x=0, y=0, z=0$, 所以 $x+y+z=0$.

②若 $x+y+z=-3$, 则 $\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+2} = \frac{z}{z+3} = \frac{x+y+z}{3} = -1$,

所以 $x=-\frac{1}{2}, y=-1, z=-\frac{3}{2}$, 且 $x+y+z=-3$.

综上, $x+y+z=0$ 或 -3 .

4. 【解析】若 $a+b+c \neq 0$, 由等比性质得, $p = \frac{(a+b-c)+(a-b+c)+(-a+b+c)}{c+b+a}$, 化简得 $p=1$,

若 $a+b+c=0$, 则 $a+b=-c$, 从而 $p = \frac{a+b-c}{c} = \frac{-c-c}{c} = -2$,

综上, $p=1$ 或 -2 .

拓展思维题

5. 【解析】由已知得 $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}, \frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$,

由合分比性质得 $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+(a+b)}{2b-(a+b)} = \frac{3b+a}{b-a}, \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+(a+b)}{2a-(a+b)} = \frac{3a+b}{a-b}$,

所以, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b} = \frac{(3b+a)-(3a+b)}{b-a} = 2$.

2. 分式的变形

1. 【解析】 $\frac{5x-y}{3x+2y} = \frac{5 \cdot \frac{x}{y} - 1}{3 \cdot \frac{x}{y} + 2} = \frac{5 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 2} = \frac{9}{8};$

$$\frac{2x^2 - y^2}{x^2 + 2xy - 3y^2} = \frac{2(\frac{x}{y})^2 - 1}{(\frac{x}{y})^2 + 2(\frac{x}{y}) - 3} = \frac{2 \times 2^2 - 1}{2^2 + 2 \times 2 - 3} = \frac{7}{5}.$$

2. 【解析】在方程 $\frac{2x+y}{x-3y} = -5$ 两边同除以 y , 得 $\frac{2 \cdot \frac{x}{y} + 1}{\frac{x}{y} - 3} = -5,$

所以 $2 \cdot \frac{x}{y} + 1 = -5 \cdot \frac{x}{y} + 15$, 所以 $\frac{x}{y} = 2$.

3. 【解析】由已知有 $2(\frac{c}{a})^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$, 解得 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 或 -1 (舍去).

所以 $\frac{3c+5a}{a-c} = \frac{3 \cdot \frac{c}{a} + 5}{1 - \frac{c}{a}} = \frac{\frac{3}{2} + 5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3+10}{2-1} = 13.$

4. 【解析】法一: $\frac{1-2x_1}{x_1+5} - \frac{1-2x_2}{x_2+5} = \frac{(1-2x_1)(x_2+5) - (1-2x_2)(x_1+5)}{(x_1+5)(x_2+5)} = \frac{11(x_2-x_1)}{(x_1+5)(x_2+5)}.$

因为 $x_1 > x_2 > -5$, 所以 $(x_1+5)(x_2+5) > 0$, $x_2 - x_1 < 0$,

所以 $\frac{1-2x_1}{x_1+5} < \frac{1-2x_2}{x_2+5}.$

法二: $\frac{1-2x_1}{x_1+5} = \frac{-2(x_1+5)+11}{x_1+5} = -2 + \frac{11}{x_1+5}$, 同理 $\frac{1-2x_2}{x_2+5} = -2 + \frac{11}{x_2+5}.$

所以 $\frac{1-2x_1}{x_1+5} - \frac{1-2x_2}{x_2+5} = \frac{11}{x_1+5} - \frac{11}{x_2+5} = \frac{11(x_2-x_1)}{(x_1+5)(x_2+5)}$, 后略.

5. 【解析】(1) $f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$, (有同学只化到 $(x_1-x_2)(1-\frac{4}{x_1x_2})$, 这是不够的)

因为 $x_1 > x_2 \geq 2$, 所以 $x_1 - x_2 > 0$, $x_1x_2 - 4 > 0$, $x_1x_2 > 0$, 所以 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 所以 $f(x_1) > f(x_2)$.

(2) $f(x) = (x + \frac{4}{x} - 4) + 4 = [(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + (\frac{2}{\sqrt{x}})^2] + 4 = (\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}})^2 + 4,$

所以当 $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, 即 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有最小值 4.

6. 【解析】 $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+1} = \frac{A(2x+1) + B(x-1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{(2A+B)x + (A-B)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{4x+5}{(x-1)(2x+1)},$

所以 $2A+B=4$, $A-B=5$, 所以 $A=3$, $B=-2$,

所以 $\frac{4x+5}{(x-1)(2x+1)} = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{2x+1}.$

7. 【解析】(1) $y = \frac{x-1}{2x-3} = \frac{\frac{1}{2}(2x-3) + \frac{1}{2}}{2x-3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-3}.$

(2) $y = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2x-3})$, 要使 y 为整数, 必须 $\frac{1}{2x-3}$ 为奇数. 又 x 为整数, 所以 $|2x-3| \geq 1$, 从而 $|\frac{1}{2x-3}|$

≤ 1 , 所以 $\frac{1}{2x-3}=1$ 或 $\frac{1}{2x-3}=-1$, 所以 $x=2$, 或 $x=1$. 因此存在 $x=2$, 或 $x=1$, 使得 y 为整数 1 或 0.

(3) 方法一: 由 (1) 知 $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-3}$, 所以当正数 x 不断增大并趋近于无穷大时, $\frac{1}{2x-3} \rightarrow 0$, 所以

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-3} \rightarrow \frac{1}{2}. \quad \text{方法二: } y = \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 - \frac{3}{x}} \rightarrow y = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

拓展思维题

8. 【解析】原式 $= x^2 + 1 - \frac{1}{x+1} - (x^2 - 3 - \frac{1}{x+2}) - (4 - \frac{1}{x+3}) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} = \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

9. (1) 证明: $y_1 - y_2 = \frac{3x_1}{x_1^2 + x_1 + 1} - \frac{3x_2}{x_2^2 + x_2 + 1}$
 $= \frac{3x_1(x_2^2 + x_2 + 1) - 3x_2(x_1^2 + x_1 + 1)}{(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1)}$
 $= \frac{(3x_1x_2^2 - 3x_2x_1^2) + (3x_1x_2 - 3x_2x_1) + (3x_1 - 3x_2)}{(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1)}$
 $= \frac{3(x_2 - x_1)(x_1x_2 - 1)}{(x_1^2 + x_1 + 1)(x_2^2 + x_2 + 1)}.$

因 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $x_2 - x_1 > 0$, $x_1x_2 - 1 < 0$.

又 $x_1^2 + x_1 + 1 = (x_1 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, 同理 $x_2^2 + x_2 + 1 > 0$,

所以 $y_1 - y_2 < 0$, 即 $y_1 < y_2$.

(2) 在分式的分子分母同除以 x , 得 $y = \frac{3}{x+1+\frac{1}{x}} = \frac{3}{x+\frac{1}{x}+1}$, 当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, 所以

$\frac{1}{x+\frac{1}{x}+1} \leq \frac{1}{3}$, 即 $y \leq 1$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号, 所以 y 的最大值为 1.

10. 【解析】(1) $y = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x^2 + 27x - 27x + 27 - 123}{x-3} = \frac{x^2(x-3) - 9x(x-3) - 27(x-3) - 123}{x-3}$

所以 $y = x^2 - 9x - 27 - \frac{123}{x-3}$.

(2) 当 $x+1$ 是 123 的约数时, 即 $x+1 = \pm 1, \pm 3, \pm 41, \pm 123$ 时, y 是整数, 所以满足条件的 x 有 8 个.

11. 【解析】步骤 1: $\left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \left[\frac{n-1}{n}, 1\right], \frac{1}{n}$, 每个区间的长度为 $\Delta x = \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$.

步骤 2: $S_i = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}, S_n = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \cdots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2]$.

步骤 3: 由于 $S_n = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right)$, 所以当 n 无限增大时, S_n 逼近 $\frac{1}{3}$.

因此 $S = \frac{1}{3}$.

步骤 4: 与步骤 3 的方法相同, 也可推得 $S = \frac{1}{3}$.

3. 分式方程与分式不等式

1. 【解析】(1) 原方程可化为: $\frac{1}{x+2} + \frac{4x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{x-2} = 1$.

方程两边都乘以 $(x+2)(x-2)$ 得: $(x-2) + 4x - 2(x+2) = x^2 - 4$,

整理得: $x^2 - 3x + 2 = 0$,

解得: $x = 1$ 或 $x = 2$.

检验: 把 $x = 1$ 代入 $x^2 - 4$, 不等于 0, 所以 $x = 1$ 是原方程的解;

把 $x = 2$ 代入 $x^2 - 4$, 等于 0, 所以 $x = 2$ 是增根.

所以, 原方程的解是 $x = 1$.

(2) 利用等比性质有 $\frac{(5x+17)-(5x+13)}{(x^2+7x+12)-(x^2+7x+10)} = \frac{5x+13}{x^2+7x+10}$, 即 $2 = \frac{5x+13}{x^2+7x+10}$,

所以 $2x^2 + 9x + 7 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = -\frac{7}{2}$,

经检验, $x = -1$ 或 $x = -\frac{7}{2}$ 均为原方程的解.

2. 【解析】不妨设该常数为 k , 即 $\frac{mx-3}{2x+1} = k$, 所以 $mx-3 = 2kx+k$,

整理得 $(m-2k)x = k+3$ 对任意的 x 恒成立 ($x \neq -\frac{1}{2}$),

所以 $m-2k=0$ 且 $k+3=0$, 即 $m=-6$ 且 $k=-3$,

综上所述, 当 $m=-6$ 时, $\frac{mx-3}{2x+1}$ 为常数 -3 .

3. 【解析】(1) 方法一: $\begin{cases} x+1 > 0, \\ 4x+1 < 3x+3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+1 < 0, \\ 4x+1 > 3x+3 \end{cases}$. 解之得 $-1 < x < 2$.

方法二: 原不等式等价于 $\frac{4x+1}{x+1} - 3 < 0$, 即 $\frac{x-2}{x+1} < 0$, 即 $(x-2)(x+1) < 0$, 所以 $-1 < x < 2$.

4. 【解析】(1) 不等式等价于 $|2x-1| < \frac{2}{3}$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$, 解之得 $\frac{1}{6} < x < \frac{5}{6}$ 且 $x \neq \frac{1}{2}$.

(2) 不等式等价于 $|x| > |1+x|$ 且 $x \neq -1$,

由 $|x| > |1+x| \Leftrightarrow |x|^2 > |1+x|^2 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$.

故原不等式的解集为 $x < -1$ 或 $-1 < x < -\frac{1}{2}$. (或写作 $x < -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq -1$)

拓展思维题

5. 【解析】设 $\frac{x^2+2x}{x^2-1} = y$, 则 $\frac{x^2-1}{x^2+2x} = \frac{1}{y}$,

原方程可化为: $8y + \frac{3}{y} = 11 \Rightarrow 8y^2 - 11y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1$ 或 $y = \frac{3}{8}$.

当 $y = 1$ 时, $\frac{x^2+2x}{x^2-1} = 1 \Rightarrow x^2+2x = x^2-1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$;

当 $y = \frac{3}{8}$ 时, $\frac{x^2+2x}{x^2-1} = \frac{3}{8} \Rightarrow 8x^2+16x = 3x^2-3 \Rightarrow 5x^2+16x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$ 或 $x = -\frac{1}{5}$.

检验: 把各根分别代入原方程的分母, 各分母都不为 0.

所以, 原方程的解是 $x = -\frac{1}{2}$, $x = -3$, $x = -\frac{1}{5}$.

第4章 二次根式

1. 二次根式的化简

1. 【答案】C. 【提示】因为 $-a > 0$, $-b > 0$, 所以 $-a = (\sqrt{-a})^2$, $-b = (\sqrt{-b})^2$, 且 $\sqrt{ab} = \sqrt{(-a)(-b)}$. 所以

$$-a + 2\sqrt{ab} - b = (\sqrt{-a})^2 + 2\sqrt{(-a)(-b)} + (\sqrt{-b})^2 = (\sqrt{-a} + \sqrt{-b})^2.$$

2. 【解析】(1) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{|b|} = -\frac{\sqrt{ab}}{b}$;

(2) $\sqrt{ab^3} = \sqrt{abb^2} = |b|\sqrt{ab} = -b\sqrt{ab}$;

(3) $\sqrt{\frac{a^2b}{c}} = \sqrt{\frac{a^2bc}{c^2}} = |\frac{a}{c}| \cdot \sqrt{bc} = \frac{a\sqrt{bc}}{c}$.

3. 【解析】(1) 原式 $= 2\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + 3\sqrt{2} = \frac{7}{6}\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$;

(2) 原式 $= \sqrt{2x} + ax\sqrt{2x} + 5y\sqrt{2x} = (1+ax+5y)\sqrt{2x}$.

4. 【解析】 $\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{14-2\cdot 3\cdot \sqrt{5}} = \sqrt{3^2-2\cdot 3\cdot \sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} = 3-\sqrt{5}$.

5. 【解析】 $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1})^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1$.

6. 【解析】方法一：利用例2的方法有 $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$. 方法二：

$(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = 4 + 2\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4 + 2 = 6$, 所以 $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}$.

7. 【解析】 $(x - \frac{1}{x})^2 + 4 = (x + \frac{1}{x})^2$, $(x + \frac{1}{x})^2 - 4 = (x - \frac{1}{x})^2$. 又因为 $0 < x < 1$, 所以 $x + \frac{1}{x} > 0$, $x - \frac{1}{x} < 0$.

所以原式 $= |x + \frac{1}{x}| - |x - \frac{1}{x}| = (x + \frac{1}{x}) + (x - \frac{1}{x}) = 2x$.

拓展思维题

8. 【解析】因为 $x > 0, y > 0$, 所以 $x - 2\sqrt{xy} - 3y = 0$ 可化为 $(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - 3(\sqrt{y})^2 = 0$, 所以 $(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$, 所以 $\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 0$ 或 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 0$ (舍去). 所以 $\sqrt{x} = 3\sqrt{y}$.

方法一：由 $\sqrt{x} = 3\sqrt{y}$ 有 $x = 9y$, 所以 $\frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y} = \frac{2(9y) + \sqrt{9y \cdot y} + 3y}{9y + \sqrt{9y \cdot y} - y} = \frac{24}{11}$.

方法二：由 $\sqrt{x} = 3\sqrt{y}$ 有 $\sqrt{\frac{x}{y}} = 3$ 且 $\frac{x}{y} = 9$, 在 $\frac{2x + \sqrt{xy} + 3y}{x + \sqrt{xy} - y}$ 的分子分母同除以 y 得, $\frac{2 \cdot \frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x}{y}} + 3}{\frac{x}{y} + \sqrt{\frac{x}{y}} - 1} = \frac{2 \times 9 + 3 + 3}{9 + 3 - 1} = \frac{24}{11}$.

9. (1) 【解析】(1) 易知 $a^3 + b^3 = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3 + (\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) = 4$,

又 $ab = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = -1$,

又 $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, 所以 $(a+b)^3 = 4 - 3(a+b)$,

所以 $(a+b)^3 + 3(a+b) - 4 = 0$.

(2) 由 (1) 知 $(a+b)^3 + 3(a+b) - 4 = 0$,

现在研究方程 $x^3 + 3x - 4 = 0$ 的实数根, 易知其必有一根是 1, 所以 $x^3 + 3x - 4$ 含有因式 $x - 1$,

于是 $x^3 + 3x - 4 = x^2(x-1) + x^2 - x + 4x - 4 = x^2(x-1) + x(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 1)$,

所以方程 $x^3 + 3x - 4 = 0$ 可化为 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$,

即 $x-1=0$ 或 $x^2 + x + 1 = 0$, 其中 $x^2 + x + 1 = 0$ 无实数根,

所以 $x^3 + 3x - 4 = 0$ 只有一个实数根 1.

而实数 $a+b$ 满足 $(a+b)^3 + 3(a+b) - 4 = 0$,

则必有 $a+b=1$, 所以 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

2. 分母有理化与分子有理化

1. 【解析】(1) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sqrt{x}-\sqrt{y}$.

(3) $\frac{7+4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{(7+4\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{2+3-3} = 2+\sqrt{3}$.

点评: 第 (2) 问若想分子分母同乘以 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$, 须在 $x \neq y$ 的情况下进行.

2. 【解析】(1) 因为 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = 8+2\sqrt{15}$, $(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 = 8+2\sqrt{12}$, 且 $8+2\sqrt{15} > 8+2\sqrt{12}$, 所以 $\sqrt{3}+\sqrt{5} > \sqrt{2}+\sqrt{6}$.

(2) 因为 $\sqrt{23}-\sqrt{21} = \frac{(\sqrt{23}-\sqrt{21})(\sqrt{23}+\sqrt{21})}{\sqrt{23}+\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{23}+\sqrt{21}}$, (分子有理化或倒数法)

同理, $\sqrt{21}-\sqrt{19} = \frac{2}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}$,

又 $\sqrt{23}+\sqrt{21} > \sqrt{21}+\sqrt{19}$,

所以 $\sqrt{23}-\sqrt{21} < \sqrt{21}-\sqrt{19}$.

(3) $\sqrt{n+2}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{1 \times (\sqrt{n+2}+\sqrt{n})} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$,

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{1 \times (\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$,

因为 $\sqrt{n+2}+\sqrt{n} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} > 0$,

所以 $\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$,

所以 $\sqrt{n+2}-\sqrt{n} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$.

3. 【解析】 $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$
 $= \sqrt{2}-1 + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \cdots + \sqrt{99}-\sqrt{98} + \sqrt{100}-\sqrt{99}$
 $= -1 + \sqrt{100}$
 $= 9$

拓展思维题

4. 【解析】因为 $a > |b|$ ，所以 $a > b$ 且 $a > -b$ ，即 $a - b > 0, a + b > 0$ 。

$$\begin{aligned}\text{所以原式} &= a\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}} - b\sqrt{\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = a\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2-b^2}} - b\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \\ &= a\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}} - b\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = \sqrt{a^2-b^2}.\end{aligned}$$

5. 【解析】分子有理化得 $y = \frac{\sqrt{x^2+x}-x}{1} = \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

分子分母同除以 x 得， $y = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$ ，

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$ 。

所以当正数 x 无限增大时， $y = \sqrt{x^2+x} - x$ 的值会逼近于 $\frac{1}{2}$ 。

3. 含根式的方程与不等式

1. 【解析】两边平方，得 $x+7=(x-5)^2$ ，

整理后，得方程 $x^2-11x+18=0$ 。

解之得 $x_1=9$ ， $x_2=2$ 。

把 $x=9$ 代入原方程两边，左边=4，右边=4，

所以 $x=9$ 是原方程的根。

把 $x=2$ 代入原方程两边，左边=3，右边=-3，两边的值不等，

所以 $x=2$ 是原方程的增根，舍去。

所以原方程的解是 $x=9$ 。

2. 【解析】移项得 $\sqrt{x+10}=7-\sqrt{x-11}$ ，

两边平方并整理得 $\sqrt{x-11}=2$ ，

所以 $x=15$ ，经检 $x=15$ 是原方程的解。

3. 【解析】令 $y=\sqrt{2x^2+x}$ ($y \geq 0$)，则原方程可化为 $y^2 - 5y - 6 = 0$ 。

解之得， $y=6$ ，或 $y=-1$ (舍去)。

当 $y=6$ 时， $\sqrt{2x^2+x}=6$ ，两边平方得

$$2x^2+x=36, \text{ 即 } 2x^2+x-36=0$$

$$\text{解得 } x_1=-\frac{9}{2}, \quad x_2=4.$$

检验：当 $x_1=-\frac{9}{2}$ 时，左边=6，右边=6，所以左边=右边，所以 $x=-\frac{9}{2}$ 是原方程的解。

当 $x_2=4$ 时，左边=6，右边=6，所以左边=右边，所以 $x=4$ 是原方程的解。

所以原方程的根是 $x_1=-\frac{9}{2}$ ， $x_2=4$ 。

4. 【解析】方程可化为 $|3k+1|=\sqrt{k^2+1}$ ，两边平方得 $9k^2+6k+1=k^2+1$ ，整理得 $8k^2+6k=0$ ，所以 $k=0$ 或 $k=-\frac{3}{4}$ 。

5. 【解析】不等式等价于 $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x^2-1 \geq (x-2)^2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x-2 < 0, \\ x^2-1 \geq 0. \end{cases}$

等价于 $\begin{cases} x \geq 2, \\ x \geq \frac{5}{4}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 2, \\ x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1. \end{cases}$

等价于 $x \geq 2$ 或 $x \leq -1$ 或 $1 \leq x < 2$,
所以原不等式的解集为 $x \leq -1$ 或 $x \geq 1$.

6. 【解析】不等式等价于 $\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ x-2 \geq 0, \\ x^2-1 \leq (x-2)^2. \end{cases}$ 化简得 $\begin{cases} x \geq 1 \text{ 或 } x \leq -1, \\ x \geq 2, \\ x \leq \frac{5}{4}. \end{cases}$

所以原不等式无解.

拓展思维题

7. 【解析】方程可化为 $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}x-a=\sqrt{a^2-\frac{x^2}{4}}$,

两边平方得 $\frac{7+4\sqrt{3}}{2}x^2-(2\sqrt{2}+\sqrt{6})ax+a^2=a^2-\frac{x^2}{4}$,

整理得 $\frac{15+8\sqrt{3}}{4}x^2=(2\sqrt{2}+\sqrt{6})ax$,

将 x 代入原方程不成立, 所以 $x \neq 0$,

所以 $\frac{15+8\sqrt{3}}{4}x=(2\sqrt{2}+\sqrt{6})a$,

解得 $x=\frac{4(2\sqrt{2}+\sqrt{6})}{15+8\sqrt{3}}a$, 化简得 $x=\frac{24\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{33}a$.

8. 【解析】移项, 得 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=3-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$,

两边平方, 得 $(x-1)^2+y^2=9-6\sqrt{(x+1)^2+y^2}+(x+1)^2+y^2$,

整理得 $4x+9=6\sqrt{(x+1)^2+y^2}$,

上式两边再平方, 得 $16x^2+72x+81=36[(x+1)^2+y^2]$,

整理得 $20x^2+36y^2-45=0$.

9. 【解析】(1) 因为 $0 < \sqrt{k}+\sqrt{k-1} < 2\sqrt{k} < \sqrt{k}+\sqrt{k+1}$ ($k \geq 1$),

所以 $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ ($k \geq 1$),

所以 $\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ ($k \geq 1$),

所以 $2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$ ($k \geq 1$).

(2) 在 (1) 中, 分别令 $k=1, 2, \dots, 100$, 得

$2(\sqrt{2}-\sqrt{1}) < \frac{1}{\sqrt{1}} \leq 1$ (这个不等式右边调整为 1)

$2(\sqrt{3}-\sqrt{2}) < \frac{1}{\sqrt{2}} < 2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$

$2(\sqrt{4}-\sqrt{3}) < \frac{1}{\sqrt{3}} < 2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

...

$$2(\sqrt{101}-\sqrt{100})<\frac{1}{\sqrt{100}}<2(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

将以上 100 个式子相加, 得 $2(\sqrt{101}-\sqrt{1})<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{100}}<2(\sqrt{100}-1)+1$.

$$\text{即 } 2(\sqrt{101}-1)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{100}}<19.$$

$$\text{而 } 2(\sqrt{101}-1)>2(\sqrt{100}-1)=18,$$

$$\text{所以 } 18<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{100}}<19.$$

所以 $n=18$.

点评: 本题第(2)问采用的是裂项法与放缩法, 其中 $\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{k}}<\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ 就是将 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 适

当的放大与缩小. 本题结论还可以利用 Excel 软件来验证, 有兴趣的同学去尝试一下.

10. 【解析】(1) 易得 $|\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}-\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}|=2$,

$$\text{所以 } \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\pm 2+\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2},$$

两边平方, 并整理得 $x+y+1=\pm\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$, 再平方, 并整理得 $2xy=1$.

所以 $y=\frac{1}{2x}$, y 是 x 的反比例函数.

$$(2) \text{ 仿 (1) 的方法, 得 } 4(4a^2-m^2)x+32abxy+4(4b^2-m^2)y^2-4m^2(a^2+b^2)+m^4=0,$$

要使 y 是 x 的反比例函数, 必须 $\begin{cases} 4a^2-m^2=0, \\ 4b^2-m^2=0 \end{cases}$ 且 $-4m^2(a^2+b^2)+m^4\neq 0$.

$$\text{所以 } |a|=|b|=\frac{1}{2}|m|, \text{ 且 } m\neq 0,$$

又 a, b, m 均为正常数, 所以 $a=b=\frac{1}{2}m$.

所以当 $a=b=\frac{1}{2}m$ 时, y 是关于 x 的反比例函数, 且 $y=\frac{m^2}{8x}$.

第5讲 二次方程

1. 韦达定理的综合应用

1. 【答案】A. 【解析】因为 $n<0$, 所以 $\Delta=m^2-4n>0$ 且 $x_1\cdot x_2=n<0$, 所以方程有两个异号的实数根. 又因为 $x_1+x_2=-m>0$, 所以正根的绝对值较大.

2. 【答案】-1. 【解析】因为 x_1, x_2 分别满足 $x_1^2-2x_1=1$, $x_2^2-2x_2=1$ ($x_1\neq x_2$), 所以 x_1, x_2 可视为一元二次方程 $x^2-2x-1=0$ 的两根, 所以 $x_1x_2=-1$.

3. 【解析】由已知, $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=6$,

$$(1) \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\times 6=13;$$

$$(2) \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{5}{6}.$$

4. 【解析】由已知, $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2=-\frac{5}{2}$,

$$(1) (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-\frac{3}{2})^2-4\times(-\frac{5}{2})=\frac{49}{4};$$

$$(2) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{117}{8}.$$

5. 【解析】由已知, $p+q=6$, $pq=7$,

$$(1) (p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = 8, \text{ 所以 } p-q = \pm 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } p^2 - q^2 = (p+q)(p-q) = 6 \times (\pm 2\sqrt{2}) = \pm 12\sqrt{2};$$

$$(2) (3p+2q) + (3q+2p) = 5(p+q) = 30, (3p+2q) - (3q+2p) = p-q = \pm 2\sqrt{2}, \text{ 两式相加有 } 2(3p+2q) = 30 \pm 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } 15 \pm \sqrt{2}.$$

6. 【解析】(1) 方程 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的根为 $x_1 = 2 + \sqrt{7}$, $x_2 = 2 - \sqrt{7}$, 故 $x^2 - 4x - 3 = (x - 2 - \sqrt{7})(x - 2 + \sqrt{7})$;

$$(2) \text{ 方程 } 2x^2 + x - 4 = 0 \text{ 的根为 } x_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}, \text{ 故 } 2x^2 + x - 4 = 2\left(x - \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}\right).$$

7. 【解析】(1) 因为方程 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 无实数根, 所以 $x^2 + 2x + 3$ 在实数范围内无法分解因式.

(2) 方程 $x^3 + 2x - 3 = 0$ 有一根为 1, 故 $x^3 + 2x - 3$ 含有因式 $x - 1$,

$$\text{于是 } x^3 + 2x - 3 = x^3 - x^2 + x^2 - x + 3x - 3 = x^2(x - 1) + x(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 3).$$

又方程 $x^2 + x + 3 = 0$ 无解, $\therefore x^2 + x + 3$ 在实数的范围内不能分解因式.

$$\text{所以 } x^3 + 2x - 3 = (x - 1)(x^2 + x + 3).$$

8. 【解析】方程为 $x^2 - (2-3)x + 2 \times (-3) = 0$, 所以 $x^2 + x - 6 = 0$.

9. 【解析】方程为 $x^2 - 5x - 14 = 0$.

10. 【解析】令 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, 易知 $a=1$, 将右边展开并整理得,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - x_1x_2x_3,$$

$$\text{对比等式两边的系数有 } x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -5, x_1x_2x_3 = -6.$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{5}{-6}.$$

拓展思维题

11. 【解析】由题设知 a, b 是方程 $x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实数根, 由根与系数关系可知 $a+b=3$, $ab=-1$

$$\text{所以 } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2b^2} = 3^2 - 2 \times (-1) = 11.$$

12. 【解析】易知 $s \neq 0$, 在第一个等式两边同除以 s^2 可以变形为: $\left(\frac{1}{s}\right)^2 + 2031\left(\frac{1}{s}\right) + 2026 = 0$. 又因为 $st \neq 1$,

即 $\frac{1}{s} \neq t$, 所以 $\frac{1}{s}, t$ 是一元二次方程 $x^2 + 2031x + 2026 = 0$ 的两个不同的实根, 于是, 有 $\frac{1}{s} + t = -2031$,

$$\frac{1}{s} \cdot t = 2026 \text{ 即 } st + 1 = -2031s, t = 2026s. \therefore \frac{st + 2030s + 1}{t} = \frac{-2031s + 2030s}{2026s} = \frac{-1}{2026}.$$

13. 【解析】因为 $xy + (x+y) = 23$, $xy(x+y) = 120$, 所以 $x+y, xy$ 可视为 $t^2 - 23t + 120 = 0$ 的两根,

该方程的根为 15、8, 所以 $\begin{cases} x+y=15 \\ xy=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$. 又因为 x, y 是正整数, 所以 $\begin{cases} x+y=8 \\ xy=15 \end{cases}$. 所以

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 34.$$

2. 二元二次方程组及其解法

1. 【答案】(1) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = -1. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 0. \end{cases}$

【解析】(1) 将 $y = 3x - 1$ 代入 $y^2 = 3x + 1$, 整理得 $x^2 - x = 0$, 后略. (2) 将 $y = -3x + 6$ 代入 $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$, 消去 y 整理得, $x^2 - 3x + 2 = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 2$. 所以原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 0. \end{cases}$

2. 【答案】(1) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 0. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -6, \\ y_2 = -2. \end{cases}$

【解析】(1) 方法一: $y = x + 1$ 代入 $(x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 0$, 后略; 方法二: 先由 $(x + y)^2 - 2(x + y) - 3 = 0$ 求得 $x + y = 3$ 或 $x + y = -1$, 再联立 $x - y = -1$.

(2) 注意到第一个方程可化为 $(3x - 2y)(3x + 2y) = 32$, 第二方程可化为 $3x - 2y = 4$, 于是有 $3x + 2y = 8$, 后略.

(3) 原方程组可化为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x = 4 \\ x^2 + y^2 + 6y = 28 \end{cases}$, 两方程相减, 整理得 $y = x + 4$, 代入 $x^2 + y^2 + 6x = 4$ 并

整理, 得 $x^2 + 7x + 6 = 0$, 解之得 $x_1 = -1, x_2 = -6$. \therefore 方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -1, \\ y_1 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -6, \\ y_2 = -2. \end{cases}$

3. 【答案】(1) $\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 2. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}, \\ y_1 = \frac{5}{3}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x_2 = \frac{5}{2}, \\ y_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$

【解析】(1) 方程可化为 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0, \\ \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{4}, \end{cases}$ 所以 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ 是方程 $t^2 - \frac{1}{4} = 0$ 的两根, 所以 $\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ 后

略. (2) 方程可化为 $\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x \cdot 3y = 5, \end{cases}$ 所以 $2x, 3y$ 是方程 $t^2 - 6t + 5 = 0$ 的两根, 后略.

4. 【解析】将 $y = k(x + 1)$ 代入 $x^2 + y^2 = 4$ 整理得 $(k^2 + 1)x^2 + 2k^2x + k^2 - 4 = 0$. 因为 $\Delta = 12k^2 + 16 > 0$, 所以 x 必有两解. 由 $y = k(x + 1)$ 知每个 x 对应一个 y , 所以原方程组共有两组解.

5. 【解析】将 $x^2 = 3 - y^2$ 代入 $x^2 - 2y^2 = k$ 整理得 $y^2 = \frac{3 - k}{3}$. 因为 $k < -6$, 所以 $3 < \frac{3 - k}{3}$, 即 $y^2 > 3$. 又

因为 $x^2 + y^2 = 3$, 所以 $0 < y^2 < 3$, 矛盾. 所以方程组无解.

6. 【解析】(1) 设公共根为 x_0 , 代入相减得, $(p_2 - p_1)x_0 = -(q_2 - q_1)$.

当 $p_2 - p_1 = 0$ 时, 必有 $q_2 - q_1 = 0$, 于是原式 $= 0$ (故可猜想原式为 0)

当 $p_2 - p_1 \neq 0$ 时, $x_0 = -\frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}$, 代入某一方程, 计算可得原式 $= 0$.

综上, $(q_2 - q_1)^2 - (p_2 - p_1)(p_1q_2 - q_1p_2) = 0$.

(2) 利用第 1 问的结论可得 $(y^2 - 6)^2 - y^2(11y^2 + 14) = 0$,

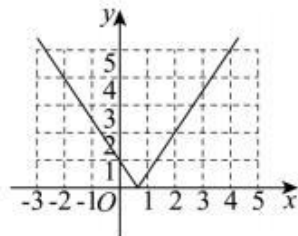
整理得 $5y^4 + 13y^2 - 18 = 0$, 解得 $y^2 = 1$ 或 $y^2 = -\frac{18}{5}$ (舍去).

所以, $y=1$ 或 -1 , 将这两个值分别代入原方程, 最终得到原方程组的解为: $\begin{cases} x_1 = -5, \\ y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

第6讲 函数及其图象

1、函数图象变换

1. 【解析】函数可化为 $y = \begin{cases} \frac{3}{2}x - 1, x \geq \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{3}{2}x, x < \frac{2}{3} \end{cases}$, 如图.

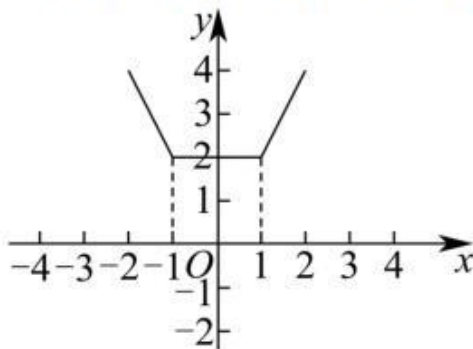


图象由直线 $y = \frac{3}{2}x - 1$ 在 $x \geq \frac{2}{3}$ 的部分和直线 $y = 1 - \frac{3}{2}x$ 在 $x < \frac{2}{3}$ 的部分构成.

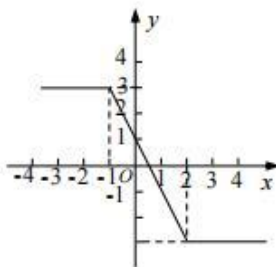
2. 【解析】当 $x < -1$ 时, $y = -2x$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = 2$; 当 $x > 1$ 时, $y = 2x$,

所以 $y = \begin{cases} -2x, x < -1 \\ 2, -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, x > 1 \end{cases}$, 如图.

y 表示数轴上点 P 与 $1, -1$ 对应点之间的距离之和 $|x-1| + |x+1|$. 在数轴上滑动点 P 进行观察:



(第2题图)



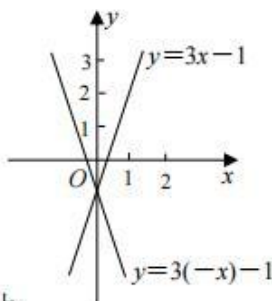
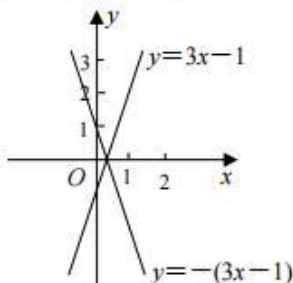
(第3题图)

3. 【解析】函数可化为 $y = \begin{cases} -3, x \geq 2, \\ -2x + 1, -1 < x < 2, \\ 3, x \leq -1. \end{cases}$ 其图象如右.

由图知, 当 $x \geq 2$ 时, $y_{\min} = -3$.

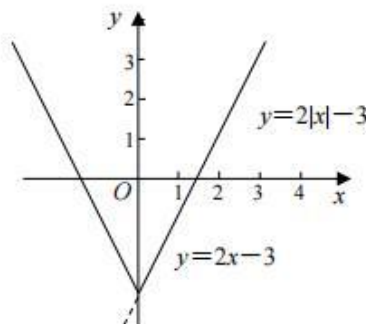
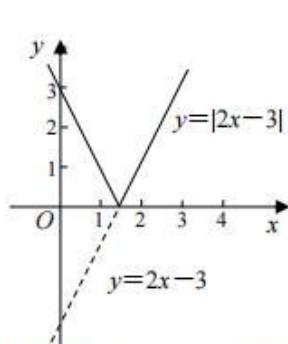
当 $x \leq -1$ 时, $y_{\max} = 3$.

4. 【解析】(1) 画出函数 $y = -(3x-1)$ 和 $y = 3x-1$ 的图象, 如下.
函数 $y = -(3x-1)$ 和 $y = 3x-1$ 的图象关于 x 轴对称.



- (2) 画出函数 $y = 3(-x) - 1$ 和 $y = 3x - 1$ 的图象, 如上.
函数 $y = 3(-x) - 1$ 和 $y = 3x - 1$ 的图象关于 y 轴对称.

5. 【解析】(1) 先画出函数 $y=2x-3$ 的图象，保留该函数图象在 x 轴上方的部分，再把 x 轴下方的部分沿 x 轴往上翻折，即可得到 $y=|2x-3|$ 的图象，如下图.



(2) 先画出函数 $y=2x-3$ 的图象，保留该函数图象在 y 轴右侧的部分，去掉左边部分，再把右边部分沿 y 轴翻折，即得到 $y=2|x|-3$ 的图象，如上图.

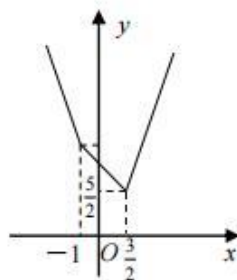
6. 【解析】由 $2x-3=0$ ，得 $x=1.5$ ；由 $x+1=0$ ，得 $x=-1$.

①当 $x \geq \frac{3}{2}$ 时， $y=(2x-3)+(x+1)=3x-2$ ；

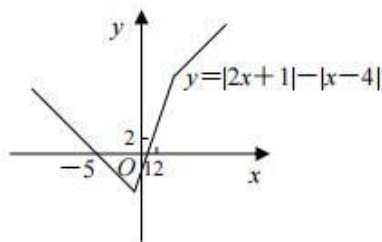
②当 $-1 < x < \frac{3}{2}$ 时， $y=-(2x-3)+(x+1)=-x+4$ ；

③当 $x \leq -1$ 时， $y=-(2x-3)-(x+1)=-3x+2$.

综上所述， $y = \begin{cases} 3x-2, & x \geq \frac{3}{2}, \\ -x+4, & -1 < x < \frac{3}{2}, \\ -3x+2, & x \leq -1. \end{cases}$ 其图象如右.

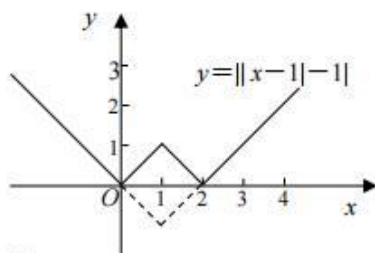


7. 【解析】 $y = \begin{cases} -x-5, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ 3x-3, & -\frac{1}{2} < x < 4, \\ x+5, & x \geq 4. \end{cases}$



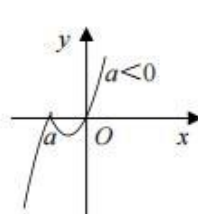
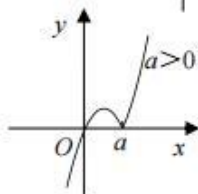
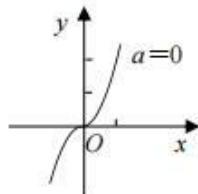
作出函数 $y=|2x+1|-|x-4|$ 的图象，如图.

8. 【解析】先画出函数 $y=x-1$ 的图象，再得到 $y=|x-1|$ 的图象，接着画出 $y=|x-1|-1$ 的图象. 保留函数 $y=|x-1|-1$ 图象在 x 轴上方的部分，再把 x 轴下方的部分沿 x 轴往上翻折，即可得到 $y=||x-1|-1|$ 的图象，如下.

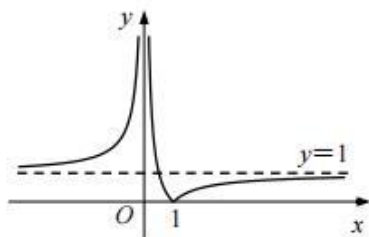


拓展思维题

9. 【解析】如图所示.



10. 【解析】(1) 先画出函数 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象, 向上平移得到 $y = 1 - \frac{1}{x}$ 的图象, 再把 x 轴下方的部分沿 x 轴往上翻折, 即可得到 $y = |1 - \frac{1}{x}|$ 的图象, 如下.



(2) 当 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, y 随 x 的增大而增大. 所以当 $x=1$ 时, y 有最小值 0. 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y=1$, 当 $x=2$ 时, $y = \frac{1}{2}$, 所以 $x = \frac{1}{2}$ 时, y 有最大值 1.

(3) 由 $y = |1 - \frac{1}{x}|$ 知它的最小值 $a \geq 0$, 又由条件 “ $a \leq x \leq b$ ” 知 $a \neq 0$, 所以 $a > 0$.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } y = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & 0 < x \leq 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}.$$

(i) 当 $0 < a < b < 1$ 时, $y = \frac{1}{x} - 1$, y 随着 x 的增大而减小,

所以当 $x=a$ 时, $y=b$; 当 $x=b$ 时, $y=a$,

$$\text{即 } \frac{1}{a} - 1 = b, \quad \frac{1}{b} - 1 = a,$$

两式相减得, $\frac{b-a}{ab} = b-a$, 所以 $ab=1$, 矛盾!

(ii) 当 $0 < a < 1 \leq b$ 时, y 的最小值必为 0, 这与 “ y 的最小值为 a ” 矛盾! (法二: y 的最小值必为 0, 于是 $a=1$, 矛盾! 法三: y 的最小值必为 0, 于是 $a=1$, $b > 1$, 但是 $x \geq 1$ 时, $f(x) < 1$, 这与 “ y 的最大值为 b ” 矛盾!)

(iii) 当 $1 \leq a < b$ 时, y 随着 x 的增大而增大,

于是当 $x=a$ 时, $y=a$; 当 $x=b$ 时, $y=b$,

$$\text{所以 } 1 - \frac{1}{a} = a, \quad 1 - \frac{1}{b} = b, \quad \text{即 } a^2 + a - 1 = 0, \quad b^2 + b - 1 = 0,$$

这表明, a, b 是同一方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的两根, 且 $ab = -1$,

该方程两根异号, 这与 “ $1 \leq a < b$ ” 矛盾!

综上, 不存在 a, b , 使得当 $a \leq x \leq b$ 时, y 的最小值为 a , 最大值为 b .

2. 反比例函数的拓展

练习

1. 【答案】(1) $0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{x} < 0$ 或 $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$; (3) $\frac{1}{x} > 0$ 或 $\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2}$; (4) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} < 0$.

【解析】画出函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象, 观察 $x \geq 2$, $x \leq 2$, $x \geq -2$, $x \leq -2$ 的部分得到纵坐标的范围即可.

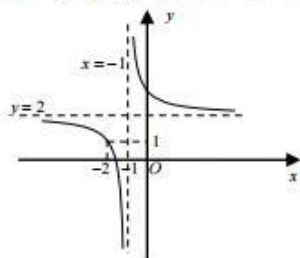
2. 【答案】(1) $0 < x \leq \frac{1}{4}$; (2) $x < 0$ 或 $x \geq \frac{1}{4}$; (3) $x > 0$ 或 $x \leq -\frac{1}{4}$; (4) $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} < 0$.

【解析】令 $\frac{1}{x}=t$ ，先由 $t \geq 4$ ， $t \leq 4$ ， $t \geq -4$ ， $t \leq -4$ 得到 $\frac{1}{t}$ 的范围，即 x 的范围。

3. (1) $\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1}$ ， $\therefore y=2+\frac{1}{x+1}$ 。图象如右。

(2) ①由图知，函数的值域为 $y \leq 1$ 或 $y > 2$ 。

②当 $x=-2$ 时， y 有最小值 1，当 $x=0$ 时， y 有最大值 3。



4. (1) $y = \frac{1}{(x+1)^2+1}$ 。因为 $(x+1)^2+1 \geq 1$ ，所以 $0 < \frac{1}{(x+1)^2+1} \leq 1$ ，所以 $0 < y \leq 1$ 。

5. 【答案】(1) $-1 < y \leq 1$ 。(2) $0 \leq y < 1$ ；(3) $0 \leq y < 1$ 。

【解析】(1) 方法一：由 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ 得： $x^2 = \frac{1-y}{1+y} \geq 0$ ，解得： $-1 < y \leq 1$ 。

方法二： $y = -1 + \frac{2}{x^2+1}$ ，因为 $x^2 \geq 0$ ，所以 $x^2+1 \geq 1$ ，所以 $0 < \frac{2}{x^2+1} \leq 2$ ，
 $-1 < -1 + \frac{2}{x^2+1} \leq 1$ 。

(2) $y = \frac{2\sqrt{x}+1-1}{2\sqrt{x}+1} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}+1}$ 。因为 $2\sqrt{x}+1 \geq 1$ ，所以 $0 < \frac{1}{2\sqrt{x}+1} \leq 1$ ，所以
 $0 > -\frac{1}{2\sqrt{x}+1} \geq -1$ ，所以 $1 > 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}+1} \geq 0$ ，所以 $0 \leq y < 1$ 。

(3) $y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ ，仿 (2) 的办法易得 $0 \leq y^2 < 1$ ，又因为 $y \geq 0$ ，所以
 $0 \leq y < 1$ 。

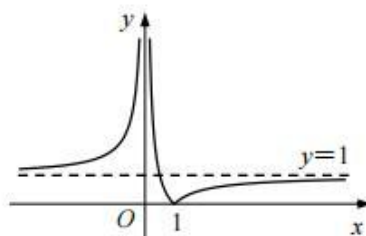
拓展思维

6. 【解析】 $y = \frac{x}{x+a} = 1 - \frac{a}{x+a}$ ，函数在 $x > -a$ 时，或在 $x < -a$ 时递增，所以只要 $-2 \geq -a$ ，即 $a \geq 2$ 。

7. 【解析】(1) $y = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ \frac{1}{x} - 1, & 0 < x < 1, \\ 1 - \frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$

(2) 函数图象如右。

(3) $\frac{2018}{4035} < x < 2018$ 。



8. 【解析】 $y = \frac{(x - \sqrt{2019}) + \sqrt{2019} - \sqrt{2018}}{x - \sqrt{2019}}$,

即 $y = 1 + \frac{\sqrt{2019} - \sqrt{2018}}{x - \sqrt{2019}}$

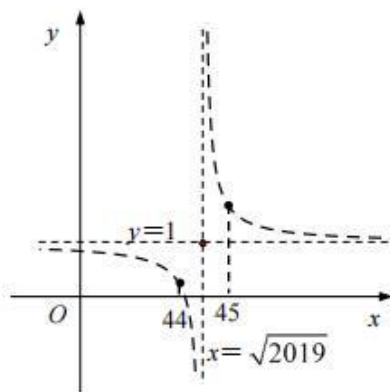
而 $\sqrt{1936} < \sqrt{2019} < \sqrt{2025}$, 从而 $44 < \sqrt{2019} < 45$.

画出函数 $y = 1 + \frac{\sqrt{2019} - \sqrt{2018}}{x - \sqrt{2019}}$ 的图象

(一系列离散点构成, 类似右图).

当 $x=44$ 时, y 有最小值 $\frac{44 - \sqrt{2018}}{44 - \sqrt{2019}}$,

当 $x=45$ 时, y 有最大值 $\frac{45 - \sqrt{2018}}{45 - \sqrt{2019}}$.



3. 利用函数的图象求值域

1. 【解析】由 $1-x \geq 0$, $1+x \geq 0$, $x \geq 0$ 得 $0 \leq x \leq 1$,

利用分子有理化有 $\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$,

所以函数 $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$, $0 \leq x \leq 1$.

当 x 增大时, $\sqrt{1+x} + \sqrt{x}$ 增大且为正数, 所以 $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}}$ 减小, 又 $\sqrt{1-x}$ 减小, 所以 y 减小,

所以当 $x=0$ 时, y 有最大值 2; 当 $x=1$ 时, y 有最小值 $\sqrt{2}-1$.

所以 $\sqrt{2}-1 \leq y \leq 2$.

2. (1) 设 $0 \leq x \leq 3$, 讨论函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 的最大值和最小值.

(2) 设 $1 \leq x \leq 3$, 讨论函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$ 的最大值和最小值.

2. 【解析】(1) $y = (x-2)^2 + 1$. 当 $x=2$ 时, $y_{\min} = 1$;

当 $x=0$ 时, $y=5$; 当 $x=3$ 时, $y=2$.

所以当 $x=2$ 时, $y_{\min} = 1$; 当 $x=0$ 时, $y_{\max} = 5$.

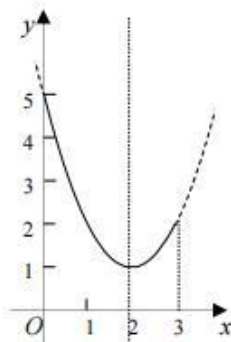
(2) $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$, 抛物线的对称轴为 $x=4$.

因为 $x=4$ 不在 $1 \leq x \leq 3$ 的范围内,

所以函数在 $x=1$ 和 $x=3$ 处取得最大值和最小值.

当 $x=1$ 时, $y = \frac{1}{2}$, 当 $x=3$ 时, $y = -\frac{7}{2}$.

所以当 $x=1$ 时, $y_{\max} = \frac{1}{2}$; 当 $x=3$ 时, $y_{\min} = -\frac{7}{2}$.



3. 【解析】函数的定义域为 $-1 \leq x \leq 1$, 设 $\sqrt{1-x^2} = t$, 那么 $0 \leq t \leq 1$.

函数可化为: $y = -t^2 + 4t + 2$ ($0 \leq t \leq 1$).

$y = -(t-2)^2 + 6$, 对称轴为 $t=2$, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, y 随 t 的增大而增大,

\therefore 当 $t=0$ 时, y 有最小值 2; 当 $t=1$ 时, y 有最大值 5.

\therefore 函数 y 的值域为 $2 \leq y \leq 5$.

说明: 由 $y = -t^2 + 4t + 2$ 可得 $t^2 - 4t + y - 2 = 0$, 再试试判别式法.

4. 【解析】(1) 因为 $y = \sqrt{-(x-1)^2 + 4}$, 其中 $0 \leq -(x-1)^2 + 4 \leq 4$ (被开方数 ≥ 0),

所以当 $x=1$ 时, y 有最大值 2;

当 $x=3$ 或 -1 时, y 有最小值 0.

(2) 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $0 \leq t \leq 1$, 且 $y = t^2 + t + 1 = (t + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

因为 $0 \leq t \leq 1$,

所以当 $t=0$ 时, y 有最小值 1, 此时 $x=0$;

当 $t=1$ 时, y 有最大值 3, 此时 $x=1$.

(3) 令 $t = \sqrt{1-x^2}$, 则 $0 \leq t \leq 1$, 且

$$y = t^2 - t + 3 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4}.$$

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, y 有最小值 $\frac{11}{4}$, 此时 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 $t=0$ 或 $t=1$ 时, y 有最大值 3, 此时 $x = \pm 1$ 或 $x=0$.

拓展思维题

5. 【解析】两种变形都是错的, 正确做法如下:

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } y = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} = \sqrt{(\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x} + 1} = \sqrt{(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{(0 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 1.$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } y = -\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2}} = -\sqrt{(\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x} + 1} = -\sqrt{(\frac{1}{x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

$$\because \frac{1}{x} < 0, \therefore \text{当 } \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \text{ 时, } (\frac{1}{x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \text{ 有最小值 } \frac{3}{4}, \text{ 从而 } y \leq -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

综上, $y \geq 1$ 或 $y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. 【解析】当 $x=0$ 时, $y=0$.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}},$$

$$\text{由于 } \frac{1}{x} > 0, \text{ 所以 } (\frac{1}{x})^2 + \frac{1}{x} + 1 = (\frac{1}{x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq (0 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}, \text{ 即 } \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} > 1,$$

$$\text{所以 } 0 < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} < 1, \text{ 即 } 0 < y < 1.$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } y = -\frac{-x}{\sqrt{x^2+x+1}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}},$$

$$\text{由于 } \frac{1}{x} < 0, \text{ 且 } 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = (\frac{1}{x} + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \text{ 即 } \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } 0 < \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } 0 > y \geq -\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

综上, 函数的值域为 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq y < 1$.

7. 【解析】(1) $PM^2 = (x-x_0)^2 + (kx+b-y_0)^2 = (k^2+1)x^2 + 2(kb-k y_0-x_0)x + (b-y_0)^2 + x_0^2$.

$$(2) \text{ 由于 } x \text{ 可取任意实数, 所以 } PM^2 \text{ 的最小值为 } \frac{4(k^2+1)[(b-y_0)^2+x_0^2] - 4(kb-ky_0-x_0)^2}{4(k^2+1)}.$$

上式的分子为

$$\begin{aligned}
& 4(k^2+1)(b-y_0)^2 + 4(k^2+1)x_0^2 - 4k^2(b-y_0)^2 - 4x_0^2 + 8k(b-y_0)x_0 \\
&= (4k^2+4-4k^2)(b-y_0)^2 + (4k^2+4-4)x_0^2 + 8k(b-y_0)x_0 \\
&= 4(b-y_0)^2 + 4k^2x_0^2 + 8k(b-y_0)x_0 \\
&= 4[(b-y_0)+kx_0]^2.
\end{aligned}$$

所以, PM 的最小值为 $\frac{|kx_0 - y_0 + b|}{\sqrt{k^2+1}}$.

8. 【解析】(1) AB 的中点运动的轨迹是以原点为圆心, 以 5 米为半径的圆.

(2) 法一: 如图, 作 $PM \perp x$ 轴于 M , 作 $BN \perp PM$ 于 N ,

设 $\angle PAM = \theta$, 则 $PM = a \sin \theta$, $BN = b \cos \theta$,

从而 P 的坐标满足:
$$\begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}.$$

又 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\therefore \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$,

$\therefore y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq a).$

法二: 设 $A(-m, 0)$, $B(0, n)$, 易得
$$\begin{cases} (x+m)^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 + (y-n)^2 = b^2 \end{cases} (*).$$

又 $\frac{PM}{AM} = \frac{PN}{BN}$, 记比值为 k , 则 $\frac{y}{x+m} = \frac{y-n}{x} = k$,

所以 $\begin{cases} x+m = y/k \\ y-n = kx \end{cases}$, 代入 (*) 得
$$\begin{cases} \frac{y^2}{k^2} + y^2 = a^2, \\ x^2 + k^2 x^2 = b^2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{y^2}{k^2} = a^2 - y^2, \\ k^2 x^2 = b^2 - x^2 \end{cases}$$

两式相乘, 消去 k^2 得 $x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(b^2 - x^2)$, 即 $a^2 b^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0$,

$\therefore y = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2} \quad (0 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq a).$

(3) 当 $a=3$, $b=2$ 时, $y = \frac{3}{2} \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$.

$\therefore x^2 = 4 - \frac{4}{9} y^2$, $0 \leq y \leq 3$.

$\therefore PM^2 = x^2 + (y-m)^2 = 4 - \frac{4}{9} y^2 + (y-m)^2$.

$\therefore PM^2 = \frac{5}{9} y^2 - 2my + m^2 + 4$, $0 \leq y \leq 3$.

(4) PM^2 是以 y 为自变量的二次函数, 下面研究其在 $0 \leq y \leq 3$ 上的最小值.

抛物线的对称轴为 $y = \frac{9}{5} m$, 开口向上.

当 $0 \leq \frac{9}{5} m \leq 3$, 即 $0 \leq m \leq \frac{5}{3}$ 时, 最小值为 $\frac{20/9(m^2+4) - 4m^2}{4 \times 5/9} = 1$, 解得 $m = \frac{\sqrt{15}}{2}$, 舍去.

当 $\frac{9}{5} m > 3$ 时, 即 $m > \frac{5}{3}$ 时, 最小值为 $\frac{5}{9} \cdot 3^2 - 2m \cdot 3 + m^2 + 4 = 1$, 解得 $m=2$ 或 4 , 符合题意.

当 $\frac{9}{5} m < 0$ 时, 即 $m < 0$ 时, 最小值为 $m^2 + 4 = 1$, 无解.

综上, 所以 $m=2$ 或 4 .