

专题一 数列

一、单选题

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_3=1$, $a_2+a_8=6$, 则 $a_1=(\quad)$
 A. 0 B. -1 C. -2 D. -3
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$ 且 $a_1=\lambda(\lambda\neq 1), a_3=2$, 则 $\lambda=(\quad)$
 A. -1 B. 2 C. 3 D. $\frac{1}{2}$
3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, a_4, a_{16} 是方程 $x^2+30x+36=0$ 的两个根, 则 $a_{10}=(\quad)$
 A. ± 6 B. 6 C. 36 D. -6
4. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为2, 若 a_1, a_3, a_4 成等比数列, 则 $a_1=(\quad)$
 A. -4 B. -8 C. -6 D. -10
5. 斐波那契数列又称黄金分割数列, 由数学家斐波那契以兔子繁殖为例子而引入, 故又称为“兔子数列”. 斐波那契数列指的是这样一个数列: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 则该数列的第10项为 (\quad)
 A. 34 B. 55 C. 68 D. 89
6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2=2$, $S_5=25$, 则 $a_4=(\quad)$
 A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
7. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 并且满足条件 $a_1>1$, $a_6a_7>1$, $\frac{a_6-1}{a_7-1}<0$, 则下列结论正确的是 (\quad)
 A. $q<0$ B. $a_6a_8>1$ C. S_n 的最大值为 S_7 D. T_n 的最大值为 T_6
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_na_{n+1}=2^n$, 则 $a_{10}=(\quad)$
 A. 16 B. 32 C. 64 D. 128

二、多选题

9. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 若 $S_4=32, S_6=72$, 则 (\quad)
 A. $d=4$ B. $a_5=16$ C. $S_5=52$ D. $\frac{S_n}{n^2}=2$
10. 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1+a_2=5$, $a_1-a_3=-15$, 则 (\quad)
 A. $a_1=1$ B. $q=4$ C. $S_4=-85$ D. $a_n=4^n$
11. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则下列说法正确的是 (\quad)
 A. 若 $a_n=-2n+11$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前5项和 S_5 最大
 B. 若等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 则公比 q 满足 $0<q<1$
 C. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{2021}>0$, 则 $a_{1011}>0$

D. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列

三、填空题

12. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 5$, 且 $a_n - a_{n-1} = -2 (n \geq 2)$, 则 $a_n =$ _____

13. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $a_3 = 12$, $S_{12} > 0$, $S_{13} < 0$, 则 S_1, S_2, \dots, S_{12} 中, _____ 最大.

14. 一个皮球从距地为 H 的地方释放, 经地面反弹最后上升至 $\frac{H}{2}$ 处, 之后每次反弹后上升的最高高度为上一次反弹的一半, 若该皮球从开始释放至第五次接触地面瞬间, 在空中的运动轨迹长为 10 米则 $H =$ _____ 米.

四、解答题

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = 2n^2 - 19n$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; (2) 若 $b_n = |a_n|$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

16. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $a_1 = 4$.

(1) 证明: $\{a_n - 1\}$ 是等比数列; (2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

17. 求 $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$ 的值.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 求数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 满足 $(a_{n+1} + 1)(a_{n+1} - 2a_n) = 0$, 且 $a_4 = a_2 a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式; (2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

专题二 平面解析几何

一、单选题

1. 已知直线 $l_1: x+2y-1=0$, $l_2: ax+4y+5=0$, 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $a = (\quad)$
- A. -2 B. 2 C. $\frac{9}{2}$ D. $-\frac{9}{2}$
2. 圆的一条直径的两个端点是 $(2,0)$, $(0,2)$ 时, 则此圆的方程是 (\quad)
- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 2$
3. 直线 $l: x-2y-1=0$ 和圆 $M: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB| = (\quad)$
- A. 2 B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 6
4. $m = -1$ 是直线 $mx + (2m-1)y + 1 = 0$ 和直线 $3x + my + 9 = 0$ 垂直的 (\quad)
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 下列说法中不正确的是 (\quad) .
- A. 点斜式 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 适用于不垂直于 x 轴的任何直线.
- B. 斜截式 $y = kx + b$ 适用于不垂直于 x 轴的任何直线.
- C. 两点式 $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ 适用于不垂直于 x 轴和 y 轴的任何直线.
- D. 截距式 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 适用于不过原点的任何直线.
6. 已知直线 m 的一个方向向量为 $u = (3, -4)$, 直线 l 经过点 $P(3, 2)$, 且 $l \perp m$, 则直线 l 的方程为 (\quad)
- A. $4x - 3y - 6 = 0$ B. $4x + 3y - 18 = 0$ C. $3x + 4y - 17 = 0$ D. $3x - 4y - 1 = 0$
7. 已知在圆 $(x+2)^2 + y^2 = r^2$ 上到直线 $x + y - 4 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点恰有三个, 则 $r = (\quad)$
- A. $2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $4\sqrt{2}$ D. 8
8. 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l , 且直线 l 与连接点 $A(1, \sqrt{3}-1)$, $B(2, 1)$ 的线段总有公共点, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是 (\quad)
- A. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ C. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ D. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

二、多选题

9. 关于直线 $l: \sqrt{3}x - 3y - 1 = 0$, 则下列结论正确的是 ()

- A. 倾斜角为 60° B. 斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. 在 y 轴上的截距为 $-\frac{1}{3}$ D. 与直线 $x - \sqrt{3}y = 0$ 垂直

10. 已知三条直线: $kx + y - \frac{1}{3} = 0$, $2x + y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ 不能围成一个三角形, 则实数 k 的值为 ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

11. 已知点 P , Q 分别在圆 $C_1: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, $C_2: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 9$ 上, 点 $A(-2, 4)$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 圆 C_1 , C_2 相交 B. $|PQ|$ 的最大值为 $5 + 4\sqrt{2}$
C. 点 C_1 到直线 AQ 距离大于 $\frac{12}{5}$ D. 当 $\angle PAQ$ 最大时, $\tan \angle PAQ = -\sqrt{3}$

三、填空题

12. 过点 $(2, 1)$ 且在 x 轴上截距与在 y 轴上截距之和为 6 的直线方程为_____.

13. 在直角坐标系中, 已知 $M(2, 1)$ 和直线 $l: x - y = 0$, 试在直线 l 上找一点 P , 在 x 轴上找一点 Q , 使三角形 MPQ 的周长最小, 最小值为_____.

14. 圆 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ 的圆心到直线 $x - ay + 1 = 0$ 的距离为 2, 则 $a =$ _____.

四、解答题

15. 已知 $\triangle ABC$ 中, $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, BC 边所在直线方程为 $x - 2y + 5 = 0$, AC 边上的高所在直线方程为 $x + y - 7 = 0$.

(1) 求 AC 边所在直线的方程; (2) 求 BC 边的中线所在直线的方程.

16. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$ 和 $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 12y + 45 = 0$.

(1) 求证: 圆 C_1 和圆 C_2 相交; (2) 求圆 C_1 和圆 C_2 的公共弦所在直线的方程和公共弦长.

17. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(6,5), B(6,-5), C(3,4)$.

(1)求 $\triangle ABC$ 的外接圆 D 的方程; (2)一条光线从点 $P(1,-1)$ 射出, 经 y 轴反射后, 与圆 D 相切, 求反射光线所在的直线方程.

18. 已知直线 $L: y=2x+4$ 与 x 轴的交点为 A , 圆 $O: x^2+y^2=r^2(r>0)$ 经过点 A .

(1) 求 r 的值; (2) 若点 B 为圆 O 上一点, 求 AB 的中点 D 的轨迹方程 (B 点异于 A 点).

(3) 若点 B 为圆 O 上一点, 且直线 AB 垂直于直线 L .求 $|AB|$.

19. 已知圆 C 的圆心 C 在直线 $5x-y-1=0$ 上, 且与直线 $2x+3y-10=0$ 相切于点 $P(2,2)$.

(1)求圆 C 的方程;

(2)若过点 $Q(-2,-5)$ 的直线 l 被圆 C 截得的弦 AB 长为6, 求直线 l 的直线方程.

专题三 圆锥曲线与方程

一、单选题

- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 为等轴双曲线, 且焦点到渐近线的距离为 1, 则双曲线的方程为()
 A. $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ B. $x^2 - y^2 = 1$ C. $x^2 - y^2 = \sqrt{2}$ D. $x^2 - y^2 = 2$
- 已知点 $A(1,0)$, $B(-1,0)$, 动点 M 满足 $|MA| - |MB| = 2$, 则点 M 的轨迹方程是()
 A. $y = 0 (-1 \leq x \leq 1)$ B. $y = 0 (x \geq 1)$ C. $y = 0 (x \leq -1)$ D. $y = 0 (|x| \geq 1)$
- 已知 A 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点, 点 A 到 C 的焦点的距离为 12, 到 y 轴的距离为 9, 则 $p =$ ()
 A. 2 B. 3 C. 6 D. 9
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为()
 A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{3x^2}{25} - \frac{3y^2}{100} = 1$ D. $\frac{3x^2}{100} - \frac{3y^2}{25} = 1$
- 与双曲线 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 有公共焦点, 且短轴长为 2 的椭圆方程为()
 A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ B. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ C. $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ D. $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1$
- 动点 M 分别与两定点 $A(-5,0)$, $B(5,0)$ 连线的斜率的乘积为 $-\frac{16}{25}$, 设点 M 的轨迹为曲线 C , 已知 $N(2, \sqrt{3})$, $F(-3,0)$, 则 $|MF| + |MN|$ 的最小值为()
 A. 4 B. 8 C. $2\sqrt{3}$ D. 12
- 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线交 C 于 A, B 两点. 若 $AF_1 \perp AF_2$, 则 $\frac{|AF_2|}{|BF_2|} =$ ()
 A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
- 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率为 2, 左、右焦点为 F_1, F_2 , P 为双曲线 C 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为()
 A. -2 B. -3 C. -4 D. -5

二、多选题

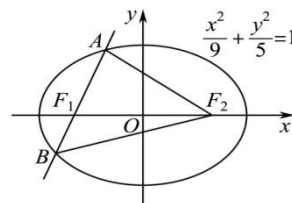
- 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的左焦点 F_1 与抛物线 $y^2 = -4\sqrt{7}x$ 的焦点重合, F_2 是双曲线的右焦点, 则下列说法正确的有().
 A. 抛物线的准线方程为: $x = 1$ B. 双曲线的实轴长为 4
 C. 双曲线的一条渐近线方程为 $2x - \sqrt{3}y = 0$ D. P 为双曲线上一点若 $|PF_1| = \frac{9}{2}$, 则 $|PF_2| = \frac{17}{2}$

10. 已知方程 $C: (4-m)x^2 + (m-2)y^2 = (4-m)(m-2)$, 则下列结论正确的是()

- A. 若方程 C 表示椭圆, 则 $2 < m < 4$ B. 若 $m < 2$, 则方程 C 表示焦点在 y 轴上的双曲线
C. 存在 m , 使方程 C 表示直线 D. 存在 m , 使方程 C 表示抛物线

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的左, 右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 F_1 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 则下列说法正确的是()

- A. $\triangle ABF_2$ 的周长为 12 B. 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$
C. $|AF_2| + |BF_2|$ 的最大值为 $\frac{26}{3}$ D. $\triangle ABF_2$ 面积最大值为 $3\sqrt{5}$



三、填空题

12. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为_____.

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{m^2} = 1 (m > 0)$ 和双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 的焦点相同, 则 $m =$ _____.

14. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点, P 是抛物线 C 上一动点, Q 是曲线 $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 25 = 0$ 上一动点, 则 $|PF| + |PQ|$ 的最小值为_____.

四、解答题

15. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点, $|F_1F_2| = 2$, $M(2, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ 为 C 上一点.

(1)求椭圆 C 的标准方程; (2)若 P 为 C 上一点, 且 $PF_1 \perp F_1F_2$, 求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 2, 离心率为 $\sqrt{3}$, 直线 $l: y = kx + m$ 与双曲线 C 相交于 A, B 两点.

(1)求双曲线 C 的方程; (2)若 AB 的中点为 $M(2, 1)$, 求直线 l 的方程.

17. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 是椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的一个顶点. 直线 l 与 C 交于 M, N 两点, 且点 $Q(2, 2)$ 为线段 MN 的中点.

(1) 求抛物线 C 的标准方程. (2) 若 O 为坐标原点, 求 $\triangle OMN$ 的面积.

18. 已知点 $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$, 动点 M 使直线 MA, MB 的斜率之积为 $\frac{1}{2}$, 其轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程; (2) 已知点 $F(\sqrt{3}, 0)$, 点 P 在曲线 C 上, 直线 PF 与 y 轴交于点 Q , 满足 $\overrightarrow{QP} + 3\overrightarrow{FQ} = \vec{0}$, 求直线 PF 的方程.

19. 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 其左焦点 F_1 到点 $P(2, 1)$ 的距离是 $\sqrt{10}$.

(1) 求椭圆 E 的方程; (2) 若直线 $l: y = kx + m$ 被圆 $O: x^2 + y^2 = 3$ 截得的弦长为 3, 且 l 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 求 $\triangle AOB$ 面积 S 的最大值.

专题四 空间向量与立体几何

一、单选题

1. 已知 $M(4, 3, 2)$ 是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点, 下列点的坐标与点 M 关于 Oxz 平面对称的点是 ()

- A. $(-4, 3, 2)$ B. $(4, -3, -2)$ C. $(-4, 3, -2)$ D. $(4, -3, 2)$

2. 已知点 B 是点 $A(3, 7, -4)$ 在 xOz 平面上的射影, 则 $|OB|$ 等于 ()

- A. $(9, 0, 16)$ B. 5 C. 13 D. 25

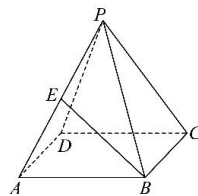
3. 在空间直角坐标系中, 已知点 $A(1, -2, 11), B(4, 2, 3), C(6, -1, 4)$, 则 $\triangle ABC$ 一定是 ()

- A. 等腰三角形 B. 等边三角形 C. 直角三角形 D. 等腰直角三角形

4. 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, E 为棱 PA 的中点, 设 $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DC} = \vec{b}, \overrightarrow{DP} = \vec{c}$,

则用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示 \overrightarrow{BE} 为 ()

- A. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$ B. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$ C. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$



5. 已知空间向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 且 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$, 则 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 \vec{b} 的夹角是 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

6. 若 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 构成空间的一个基底, 则下列向量能构成空间的一个基底的是 () .

- A. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ B. $\vec{a}, \vec{c}, \vec{a} - \vec{c}$
C. $\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} - \vec{b}$ D. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{c}$

7. 若平面 α 的法向量为 $\vec{u} = (-1, 2, 4)$, 平面 β 的法向量为 $\vec{v} = (m, -1, -2)$, 直线 l 的方向向量为

$\vec{t} = (n, -2, -4)$, 则 ()

- A. 若 $\alpha // \beta$, 则 $m = 2$ B. 若 $l \perp \alpha$, 则 $n = 2$
C. 若 $n = -20$, 则 $l // \alpha$ D. 若 $m = -10$, 则 $\alpha \perp \beta$

8. 已知空间中三点 $A(0, 1, 0), B(2, 2, 0), C(-1, 3, 1)$, 则 ()

- A. \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 是共线向量 B. \overrightarrow{AB} 的单位向量是 $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$

- C. 平面 ABC 的一个法向量是 $(1, -2, 5)$ D. \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{BC} 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{55}}{11}$

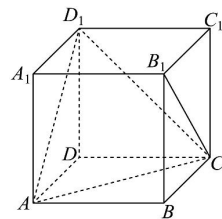
二、多选题

9. 下列利用方向向量、法向量判断线、面位置关系的结论中，正确的是（ ）

- A. 两条不重合直线 l_1, l_2 的方向向量分别是 $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (-2, -3, 1)$, 则 $l_1 // l_2$
- B. 两个不同的平面 α, β 的法向量分别是 $\vec{u} = (2, 2, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4, 2)$, 则 $\alpha \perp \beta$
- C. 直线 l 的方向向量 $\vec{a} = (1, -1, 2)$, 平面 α 的法向量是 $\vec{u} = (6, 4, -1)$, 则 $l \perp \alpha$
- D. 直线 l 的方向向量 $\vec{a} = (0, 3, 0)$, 平面 α 的法向量是 $\vec{u} = (0, -5, 0)$, 则 $l // \alpha$

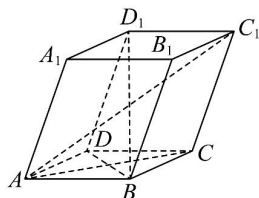
10. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 下列四个结论中正确的是（ ）

- A. $BC_1 //$ 平面 ACD_1 B. 直线 BC_1 与直线 AD_1 为异面直线
- C. 直线 BC_1 与直线 AD_1 所成的角为 90° D. $B_1D \perp$ 平面 ACD_1



11. 如图, 在平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 以顶点 A 为端点的三条棱长均为 6, 且它们彼此的夹角都是 60° , 下列说法中正确的是（ ）

- A. $CC_1 \perp BD$ B. $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 36$
- C. $\overrightarrow{B_1C}$ 与 $\overrightarrow{AA_1}$ 夹角是 60° D. 直线 AC 与直线 A_1C_1 的距离是 $2\sqrt{6}$



三、填空题

12. 对于任意实数 x, y, z , $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$ 的最小值为_____.

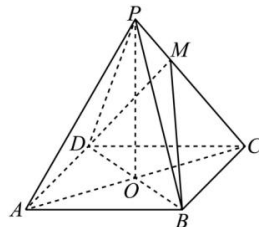
13. O 为空间中任意一点, A, B, C 三点不共线, 且 $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$, 若 P, A, B, C 四点共面, 则实数 $t =$ _____.

14. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3, -1)$, $\vec{b} = (-4, t, 2)$, 若 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为钝角, 实数 t 的取值范围为_____.

四、解答题

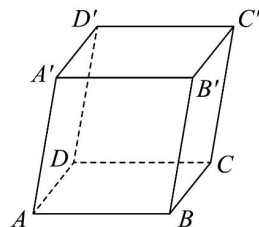
15. 如图, 已知四棱锥 $P - ABCD$ 的底面是菱形, 对角线 AC, BD 交于点 O , $OA = 4$,

$OB = 3$, $OP = 4$, 且 $OP \perp$ 平面 $ABCD$, 点 M 为 PC 的三等分点 (靠近 P), 建立适当的空间直角坐标系并求各点的坐标.



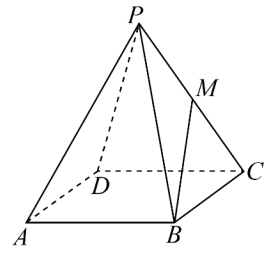
16. 已知平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$, 化简下列向量表达式, 并在图中标出化简得到的向量:

- (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$; (2) $\overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; (3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DD'} - \overrightarrow{BC})$.



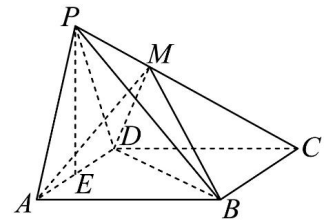
17. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形, 侧棱 PA 的长为 2, 且 PA 与 AB 、 AD 的夹角都等于 60° , M 是 PC 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} = \vec{c}$.

(1) 试用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示向量 \overrightarrow{BM} ; (2) 求 BM 的长.



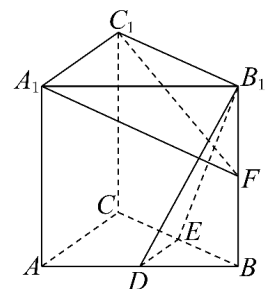
18. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = PD = \sqrt{5}$, 点 E 是线段 AD 的中点, $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MP}$.

(1) 证明: $PE \parallel$ 平面 BDM ; (2) 求平面 AMB 与平面 BDM 的夹角.



19. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, D, E, F 分别为 AB, BC, B_1B 的中点.

(1) 证明: $A_1C_1 \parallel$ 平面 B_1DE ; (2) 若 $AB = 1$, $AB \perp AC$, $B_1D \perp A_1F$, 求点 E 到平面 A_1FC_1 的距离.



专题五 导数

一、单选题

- 已知 $f(x) = e^x \cos x$ ，则 $f'(0) = (\quad)$
 A. -1 B. 0 C. 1 D. e
- 曲线 $f(x) = \ln x - x^2$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 (\quad)
 A. $y = -x$ B. $y = 2x - 3$ C. $y = -3x + 2$ D. $y = -2x + 1$
- 函数 $f(x) = 2x - \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是 (\quad)
 A. 增函数 B. 减函数 C. 先增后减 D. 不确定
- 已知 $f(x) = e^x + 2xf'(1)$ ，则 $f'(0) = (\quad)$
 A. $1 + 2e$ B. $1 - 2e$ C. $\ln 2$ D. $2e$
- 设函数 $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$ ，则 (\quad)
 A. $f(x)$ 的极大值为 $4 - \ln 2$ B. $f(x)$ 的极小值为 $4 - \ln 2$
 C. $f(x)$ 的极大值为 $1 + \ln 2$ D. $f(x)$ 的极小值为 $1 + \ln 2$
- 若 $x = 1$ 是函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + (a^2 - 1)x$ 的极大值点，则实数 a 的值为 (\quad)
 A. 0 B. -2 C. ± 2 D. 0 或 -2
- 从长 32cm ，宽 20cm 的矩形薄铁板的四角剪去相等的正方形，做一个无盖的箱子，若使箱子的容积最大，则剪去的正方形边长为 (\quad)
 A. 4cm B. 2cm C. 1cm D. 3cm
- 若函数 $f(x) = kx - e^x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减，则 k 的取值范围是 (\quad)
 A. $[1, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $[e, +\infty)$ D. $(-\infty, e]$

二、多选题

9. 下列说法中正确的有 (\quad)

A. $\left(\sin \frac{\pi}{4} \right)' = \cos \frac{\pi}{4}$

B. 已知函数 $f(x)$ 在 R 上可导，且 $f'(1) = 1$ ，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + 2\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2$

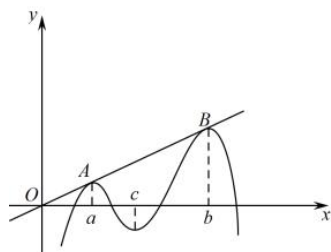
C. 一质点的运动方程为 $S = t^2$ ，则该质点在 $t = 2$ 时的瞬时速度是 4

D. 若 $y = f(x) \cdot g(x)$ ，则 $y' = f'(x) \cdot g'(x)$

10. 如图， c 为函数 $f(x)$ 的极小值点，已知直线 $g(x) = kx (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于 A 、 B 两点，设 A 、 B 两点的横坐标分别为 a 、 b ，函数 $F(x) = g(x) - f(x)$ ，下列说法正确的有 (\quad)

A. $F(x)$ 有极大值，也有极小值 B. $x = a$ 是 $F(x)$ 的极小值点

C. $x = b$ 是 $F(x)$ 的极大值点 D. $x = c$ 是 $F(x)$ 的极大值点



11. 已知函数 $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 2x + 1$, 则下列说法正确的有 ()

A. $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1)$ 上单调递增 B. $f(x)$ 的对称中心为 $\left(-\frac{5}{6}, f\left(-\frac{5}{6}\right)\right)$

C. $f(x)$ 有 3 个零点

D. $y=1$ 与 $y=f(x)$ 有 1 个交点

三、填空题

12. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$, 则函数 $y = f(x) \cdot e^x$ 在 $x=1$ 处的瞬时变化率为_____.

13. 若直线 $y = kx + 1$ 是函数 $f(x) = \ln x$ 图象的一条切线, 则 $k =$ _____

14. 已知曲线 $y = \ln x$ 与 $y = ax^2 (a > 0)$ 有公共切线, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题

15. 求下列函数的导数:

(1) $y = (x+1)\ln x$;

(2) $y = \frac{\sin x}{x^2}$;

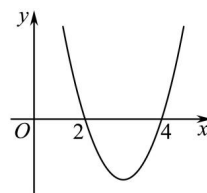
(3) $y = e^{-x} \cos 2x$

16. 已知函数 $f(x) = -x \ln x + 2x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间以及极值; (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e^2]$ 上的最小值.

17. 已知三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 的极大值是 20, 其导函数 $y = f'(x)$ 的图象经过点 $(2, 0), (4, 0)$, 如图

所示, 求 (1) a, b, c 的值; (2) 若函数 $y = f(x) - m$ 有三个零点, 求 m 的取值范围.



18. 已知 $b > a > e$ ，其中 e 是自然对数的底数.

(1) 当 $a = 3$, $b = 4$ 时, 比较 a^b 与 b^a 的大小关系; (2) 试猜想 a^b 与 b^a 的大小关系, 并证明你的猜想.

19. 已知函数 $f(x) = ae^x - x (a > 0)$. (1) 若函数 $f(x)$ 存在零点, 求实数 a 的最大值;

(2) 当 $x > 0$ 时, 函数 $f(x) \geq x^2 - x \ln x$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

综合测评小题卷

一、单选题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 满足 $a_1 + a_{2021} = 4$, 则 $a_{1011} =$ ()

A. 4 B. 2 C. 0 D. -2

2. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点作直线 l 交抛物线于 A 、 B 两点, 若线段 AB 中点的横坐标为 3, 则 $|AB|$ 等于 ()

A. 10 B. 8 C. 6 D. 4

3. 函数 $f(x) = \ln 2x - \frac{1}{x}$ 的图象在点 $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 ()

A. $y = 6x - 5$ B. $y = 8x - 6$ C. $y = 4x - 4$ D. $y = 10x - 7$

4. 若圆 C 与圆 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 1$ 关于直线 $y = x - 1$ 对称, 则圆 C 的方程是 ()

A. $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$ B. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

C. $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 1$ D. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 1$

5.《莱茵德纸草书》(RhindPapyrus)是世界上最古老的数学著作之一.书中有这样一道题目:把93个面包分给5个人,使每个人所得面包个数成等比数列,且使较小的两份之和等于中间一份的四分之三,则最大的一份是()个.

- A. 12 B. 24 C. 36 D. 48

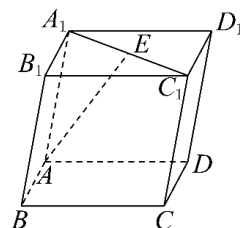
6.已知点 $P(3,4)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上一点, F_1, F_2 是椭圆的两个焦点,若 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$,

求椭圆的方程()

- A. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ C. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{10} = 1$ D. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$

7.如图,在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 A_1C_1 的中点,若 $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AA_1} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AD}$, 则()

- A. $x=1, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$ B. $x=1, y=\frac{1}{2}, z=\frac{1}{2}$
C. $x=\frac{1}{2}, y=1, z=-\frac{1}{2}$ D. $x=-\frac{1}{2}, y=1, z=\frac{1}{2}$



8. 设 $a = \frac{2}{e^2}$, $b = \frac{\ln 2}{2}$, $c = \frac{1}{e}$, 则 a, b, c 的大小关系为()

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$
C. $a < c < b$ D. $a < b < c$

二、多选题

9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 前 n 项和为 S_n , 且 $S_4 = 8$, $S_6 = -12$, 以下命题正确的是()

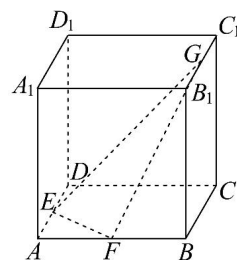
- A. S_n 的最大值为 12 B. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是公差为 -2 的等差数列
C. a_n 是 4 的倍数 D. $S_5 < 0$

10. 下列函数在定义域上为增函数的是()

- A. $f(x) = x \ln x$ B. $f(x) = \ln x + x$ C. $f(x) = x - \cos x$ D. $f(x) = x^2 e^x$

11.如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F, G 分别为 AD, AB, B_1C_1 的中点,以下说法正确的是()

- A. $A_1C \perp$ 平面 EFG
B. C 到平面 EFG 的距离为 $\sqrt{3}$
C. 过点 E, F, G 作正方体的截面,所得截面的面积是 $3\sqrt{2}$
D. 平面 EGF 与平面 BCC_1B_1 夹角余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



三、填空题

12. 直线 $l: (m+2)x + (1-2m)y + 6m - 3 = 0$ 过定点_____.

13.已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点,过左焦点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 A, B

两点,且 $|AF_1| = 3|BF_1|$, $|AB| = |BF_2|$, 则椭圆 C 的离心率为_____.

14. 若函数 $f(x) = ax^3 - 3ax^2 + 1$ 有 3 个不同的零点,则实数 a 的取值范围为_____.